Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

Vakblad
voor de
wiskundeleraar

64e jaargang
1988 | 1989
november

Euclides 3

Wolters-Noordhoff

● Euclides ● ● ● ●

Redactie

Drs H. Bakker
Drs R. Bosch
G. Bulthuis
Drs M. C. van Hoorn (hoofdredacteur)
N. T. Lakeman (beeldredacteur)
Drs A. B. Oosten (voorzitter)
P. E. de Roest (secretaris)
Ir. V. Schmidt
Mw. H. S. Susijn-van Zaale
Mw. Drs A. Verweij (eindredacteur)
Dr. P. G. J. Vredenduin (penningmeester)
A. van der Wal

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f*55,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f*37,50; contributie zonder Euclides *f*30,–.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland.
Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs M. C. van Hoorn, Postbus 9025, 9703 LA Groningen. Zij dienen machinaal geschreven te zijn en bij voorkeur te voldoen aan:

- ruime marge
- regelafstand van 2
- 48 regels per kolom
- maximaal 47 aanslagen per regel
- liefst voorzien van (genummerde) illustraties
- die gescheiden zijn van de tekst
- aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
- waar nodig voorzien van bijschriften

De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Abonnementen niet-leden

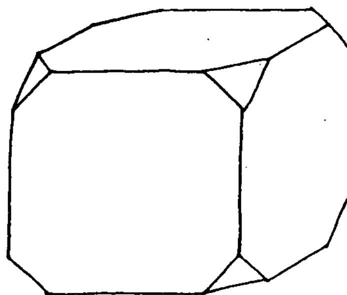
Abonnementsprijs voor niet-leden *f*52,00. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f*32,00.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f*8,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-6 20 78/6 20 79. Telex 39731 (Samsy).

ISSN 01.65-0394

Inhoud



. . . als je daar nou eens een hoek af zou zagen . . .

Actualiteit

Eindexamens vwo en havo, eerste tijdvak 1988

Inleiding

In dit artikel vindt men allerlei wetenswaardigheden omtrent deze examens. Eerst komen de resultaten aan de orde aan de hand van de steekproefgegevens die het CITO verzameld heeft (H. N. Schuring), vervolgens de vaststelling van de cesuur door de CEVO met behulp van deze streekproefgegevens (drs. W. Kleijne) en tenslotte de meningen van de docenten in een verslag van de regionale besprekingen van deze examens, georganiseerd door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (drs. J. W. Maassen).

De resultaten van de examens

Vooraf
Het geven van een overzicht van de resultaten van deze examens is slechts mogelijk dank zij de medewerking van de betrokken docenten die de gegevens van vijf kandidaten van hun school tijdig hebben opgestuurd.

Uitleg over de verstrekte cijfers
In de gegevens van de steekproeven komen enige uitdrukkingen en cijfers voor, waarvan de betekenis hieronder uitgelegd wordt:

– *de p'-waarde*
De gemiddelde score van een opgave-onderdeel, uitgedrukt in procenten van het maximaal te behalen puntenaantal voor dat onderdeel, noemt men de p'-waarde van dat onderdeel.

– *de RIT*
De RIT is een maat voor de correlatie tussen een vraag en de totale toets. De RIT drukt de discriminerende waarde van een vraag uit: $-1 \leqq \text{RIT} \leqq 1$. Een hoge RIT geeft aan dat de vraag goed discrimineert, d.w.z. 'goede' kandidaten maken de betrokken vraag goed en 'slechte' kandidaten maken de betrokken vraag slecht. Indien $\text{RIT} = -1$ is er sprake van een volledige negatieve correlatie en hebben alle 'goede' kandidaten de vraag fout en de 'slechte' kandidaten de vraag goed opgelost.

– *de RIR*
De RIR is een analoge maat voor de correlatie tussen een vraag en de rest van de toets, waarin dit vraag-onderdeel niet meegerekend wordt. Het zal duidelijk zijn dat de RIR altijd lager is dan de RIT van een vraag.

Vwo wiskunde A

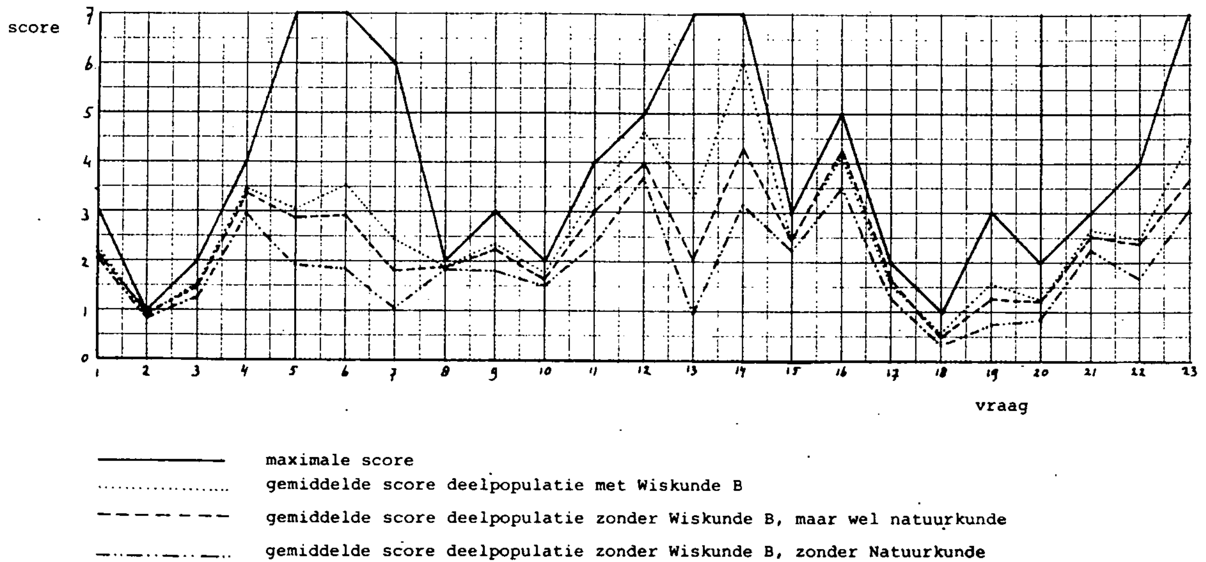
Op grond van de resultaten van 1494 kandidaten is het volgende overzicht tot stand gekomen (zie blz. 67).
De gemiddelde score, inclusief de 10 punten vooraf, is 60,6 met een standaarddeviatie van 17,1.
De vragen 5, 6, 7, 13 en 19 hebben een lage score ($p' < 40\%$), waarbij meer dan 50% van de kandidaten ten hoogste 1 punt scoorden.

De Advies Commissie van Docenten (ACD), belast met het maken van concept-examenopgaven, heeft in 1986, na het verschijnen van krantenartikelen, een opgave gemaakt over de verspreiding van AIDS. Omdat het niet onmogelijk is dat sommige kandidaten hierdoor emotioneel getroffen kunnen worden, heeft de ACD besloten de context te verplaatsen naar de 21e eeuw door van AIDS een ruimteziekte te maken (Astronomical Interstellar Disease-Syndrome). Met deze context is het ook mogelijk geneesmiddelen te gebruiken waardoor het lineair programma getoetst kan worden in de vragen 6 en 7.

vraag	maximale score	gemiddelde score	p'-waarde	R_{it}	R_{ir}
1	3	2,1	71	0,27	0,22
2	1	0,9	89	0,23	0,21
3	2	1,4	68	0,36	0,32
4	4	3,2	79	0,36	0,30
5	7	2,4	35	0,51	0,38
6	7	2,5	36	0,51	0,39
7	6	1,6	26	0,53	0,43
8	2	1,9	93	0,23	0,21
9	3	2,0	67	0,40	0,34
10	2	1,6	81	0,38	0,35
11	4	2,8	69	0,53	0,47
12	5	4,0	80	0,51	0,45
13	7	1,9	27	0,62	0,51
14	7	4,2	60	0,63	0,52
15	3	2,3	78	0,45	0,40
16	5	3,8	76	0,57	0,50
17	2	1,4	71	0,46	0,42
18	1	0,4	44	0,57	0,55
19	3	1,1	36	0,62	0,57
20	2	1,0	51	0,52	0,47
21	3	2,4	81	0,53	0,47
22	4	2,0	51	0,59	0,52
23	7	3,6	51	0,59	0,47

Van 1484 kandidaten uit de steekproef zijn gegevens bekend over hun vakkenpakket:
481 kandidaten hebben ook wiskunde-B examen gedaan,
171 geen wiskunde B, maar wel natuurkunde en
832 geen wiskunde B en ook geen natuurkunde.
De gemiddelde scores van deze deelpopulaties zijn respectievelijk 71,7; 64,8 en 53,3.
De gemiddelde scores per vraag in deze deelpopulaties zijn in figuur 1 weergegeven (zie blz. 68).
Uit deze figuur blijkt ook de relatief lage gemiddelde score van vraag 5, 6 en 7 in alle deelpopulaties; blijkbaar hebben veel leerlingen geen juiste oplossingsmethode voor deze vragen kunnen vinden.
De gegevens van de deelpopulaties waren ook beschikbaar voor de cesuurvaststelling door de Cevovaksectie wiskunde havo/vwo, zoals verderop blijkt.
De leden van de Cevo en de ACD hebben een jaar geleden een schatting gemaakt van de moeilijkheidsgraad van dit examen. De gemiddelde schatting van de gemiddelde score voor de gehele populatie was 62,9; een weinig hoger dan het werkelijk gemiddelde van 60,6. De gemiddelde schatting van de gemiddelde score van de deelpopulatie zonder wiskunde B en zonder natuurkunde was 52,5; terwijl de werkelijke gemiddelde score van deze deelpopulatie 53,3 was.
De samenstellers van de examens schatten de p'-waarden van elke vraag in klassen met een breedte van 20%. De vragen 5, 6 en 7 zijn vaak in een hogere klasse ingedeeld dan die van de werkelijke p'-waarde, vandaar dat de gemiddelde schatting iets hoger uitkomt. Het verschil 2,3 scorepunt is van dezelfde orde als de onnauwkeurigheid van het instrument, doordat de gemiddelde score geschat wordt door het klassenmidden.
Vorig jaar was de gemiddelde schatting 1,8 scorepunt onder het gemiddelde.

VWO-Wiskunde A 1988-I Deelpopulaties



figuur 1

Vwo-wiskunde B

Op grond van de resultaten van 2097 kandidaten is het volgende overzicht tot stand gekomen:

vraag	maximale score	gemiddelde score	p′-waarde	R_{it}	R_{ir}
1	5	3,7	74	0,43	0,36
2	2	1,6	81	0,42	0,39
3	1	0,9	92	0,23	0,22
4	7	4,0	57	0,61	0,47
5	7	4,2	60	0,55	0,43
6	6	3,9	65	0,52	0,40
7	4	3,1	76	0,50	0,45
8	3	1,9	65	0,43	0,38
9	1	0,8	81	0,36	0,34
10	5	3,8	76	0,54	0,46
11	4	1,1	28	0,59	0,52
12	2	1,9	93	0,26	0,23
13	6	5,6	94	0,30	0,25
14	3	1,3	42	0,52	0,47
15	3	2,5	83	0,35	0,30
16	8	0,6	7	0,42	0,36
17	8	3,5	43	0,63	0,48
18	7	2,5	36	0,63	0,49
19	6	3,2	54	0,57	0,43
20	2	0,3	15	0,33	0,29

De gemiddelde score, inclusief de 10 punten vooraf, is 60,3 met een standaarddeviatie van 15,4.
De vragen 11, 16, 18 en 20 hebben een lage score (p' < 40%), waarbij meer dan 50% van de kandidaten ten hoogste 1 punt scoorden.
In vraag 11 moest een lijn gevonden worden die de oppervlakte van vraag 10 in een gegeven verhouding verdeelt en in vraag 16 moest de oppervlakte van een vlieger berekend worden, terwijl de vlieger eerst nog opgespoord moest worden. Deze laatste vraag van het analysegedeelte heeft veel kandidaten veel moeite en tijd gekost. In vraag 18 moest de afstand van een lijn tot een vlak uitgerekend worden, wat zowel met evenredigheden als met vectoren uitgevoerd kan worden. In vraag 20 moest een figuur getekend worden en daarmee een geroteerd punt, terwijl de rotatiehoek in vraag 19 berekend is.
Ook voor dit examen hebben de leden van de Cevo en ACD de gemiddelde score geschat. De gemiddelde schatting was 61,9 wat iets hoger is dan het werkelijke gemiddelde van 60,3. De resultaten van het ruimtemeetkunde vraagstuk zijn iets hoger geschat. Vermoedelijk waren de resultaten beter geweest als een werkblad bij het examen was gevoegd.

Havo-wiskunde

Op grond van de resultaten van 2339 kandidaten is het volgende overzicht tot stand gekomen:

vraag	maximale score	gemiddelde score	p'-waarde	R_{it}	R_{ir}
1	5	4,5	90	0,35	0,29
2	6	3,3	56	0,62	0,51
3	7	2,1	30	0,61	0,50
4	6	4,5	75	0,51	0,42
5	6	3,1	51	0,56	0,45
6	6	3,3	55	0,48	0,40
7	6	4,4	73	0,47	0,36
8	6	3,2	53	0,50	0,38
9	6	3,8	63	0,40	0,28
10	7	2,4	34	0,61	0,50
11	5	1,9	37	0,63	0,55
12	6	0,7	12	0,51	0,44
13	2	1,7	83	0,47	0,43
14	4	2,3	57	0,49	0,42
15	6	2,3	39	0,67	0,59
16	6	0,7	12	0,49	0,41

De gemiddelde score, inclusief de 10 punten vooraf, is 54,1; met een standaarddeviatie van 15,6.
De vragen 3, 10, 11, 12 en 16 hebben een lage p'waarde terwijl meer dan 50% van de kandidaten ten hoogste 1 punt scoorden.
Het is jammer weer te moeten constateren dat de goniometrie-opgave slecht gemaakt is. De figuur in opgave 4 gaf kennelijk te weinig hulp.
De leden van de Cevo en de ACD hadden voor de vragen 10, 11 en 12 een beter resultaat voorspeld. Dit verklaart de hogere gemiddelde schatting van de gemiddelde score 59,2, terwijl het werkelijke gemiddelde 54,1 is. Vorig jaar was het verschil 0,6 scorepunt.

De vaststelling van de cesuur

Bij de vergadering van de Cevo-vaksectie wiskunde havo/vwo waren de steekproefgegevens aanwezig, die het Cito berekend heeft op grond van de gegevens van 5 kandidaten per school, als ook de verslagen van de regionale besprekingen voor zover deze op tijd naar het bestuur van de NVvW waren gezonden.

Uit deze gegevens is gebleken dat het vwo-wiskunde A examen over het algemeen positief gewaardeerd is. Evenals vorig jaar zijn de resultaten van de deelpopulaties ook beschouwd. Daarbij bleek een

hoog percentage onvoldoende te bestaan bij die categorie kandidaten die naast wiskunde A noch in wiskunde B noch in natuurkunde examen deden, zoals blijkt uit het volgende overzicht.

	wi A	A + B	A + N	A
% onvoldoende	32	12	22	46
cesuur	51/52	51/52	51/52	51/52
gem. cijfer	6,3	7,4	6,7	5,6

Misschien moet dit gezien worden in relatie tot het feit dat het vak nog in z'n beginfase verkeert. Dit alles was aanleiding de cesuur vast te stellen op 51/52.

Het vwo-wiskunde B examen vond men over het algemeen een goed examen op het juiste niveau. De secuur werd vastgesteld op 54/55.

Het havo-wiskunde examen achtte men over het algemeen van een goed niveau. Wel bleek dat een vrij groot aantal docenten het aantal routine-opgaven te klein vond. Gevoegd bij het oordeel dat bepaalde opgaven een, voor de havo-kandidaat, hoge mate van originaliteit bezitten en dat het werk vrij omvangrijk was, hebben geleid tot de vaststelling van de cesuur op 51/52.

Overzicht van de resultaten op grond van de steekproef van 5 kandidaten per school.

	wi A	wi B	havo
% onvoldoende	32	36	43
cesuur	51/52	54/55	51/52
gem. cijfer	6,3	6,0	5,7

Regionale besprekingen wiskunde vwo en havo 1988

Traditiegetrouw organiseerde de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren ook dit jaar regionale besprekingen over het examen wiskunde.
Voor wiskunde A gebeurde dit op tien plaatsen met in totaal ruim 300 deelnemers; voor wiskunde B en wiskunde havo gebeurde dit op zeven plaatsen met in totaal voor zowel wiskunde B als wiskunde havo circa 140 deelnemers.
Op de bijeenkomsten werden aan het begin enige vragen over het examen gesteld. Dit leidde tot de volgende resultaten.

	wiskunde A-vwo	wiskunde B-vwo	wiskunde havo
in vergelijking tot vorig jaar is het niveau van het CSE 1988			
lager	27%	0%	1%
gelijk	60%	26%	64%
hoger	13%	74%	35%
De spreiding over de stof is			
slecht	15%	26%	0%
voldoende	57%	49%	53%
goed	28%	25%	47%
Het aantal routinevragen is			
te klein	2%	3%	31%
goed	88%	90%	65%
te groot	10%	7%	5%
Het aantal originele opgaven is			
te klein	15%	18%	6%
goed	80%	77%	72%
te groot	5%	4%	22%

	wiskunde A-vwo	wiskunde B-vwo	wiskunde havo
Het correctievoorschrift is			
te gedetailleerd	1%	5%	12%
goed	87%	95%	84%
te weinig gedetailleerd	12%	0%	5%
De poging om de opgaven naar opklimmende moeilijkheidsgraad te rangschikken is			
niet gelukt	78%	27%	19%
redelijk gelukt	21%	32%	58%
goed gelukt	1%	41%	23%
De redactie van de opgaven is in het algemeen			
te beknopt	8%	0%	12%
goed	90%	86%	87%
te uitvoerig	1%	14%	1%
De omvang van het CSE 1988 was			
te gering	1%	0%	0%
goed	89%	34%	64%
te veel	10%	66%	36%

De percentages zijn berekend over het aantal aanwezigen dat een keuze deed. Vooral bij de vraag over het correctievoorschrift, maar ook bij de vraag over de redactie hebben een aantal deelnemers geen keuze gedaan, omdat zij het antwoord 'slecht' misten.
In één havo-bespreking is de vraag over de redactie vervangen door 'De leesbaarheid van de vragen is in het algemeen'.
Van de meeste bijeenkomsten zijn verslagen gemaakt waarvan een kopie aan de Cevo is gezonden met het verzoek de gemaakte opmerkingen te gebruiken bij het opstellen van de examens voor volgende jaren.
In dit artikel worden slechts de belangrijkste punten uit de verslagen samengevat.

Algemeen

Nieuwe lay-out
Ofschoon niet iedereen geheel tevreden is over de nieuwe lay-out, is het gemiddelde oordeel gunstig. Kritiek was er over de tekst op de voorpagina, die zo weinig op wiskunde was toegesneden dat hij alleen tot verwarring kon leiden. Volgens sommigen heeft deze tekst er toe geleid dat bij vraag 3 (opgave 1) van het havo-werk leerlingen zich tot één cirkel hebben beperkt.
Bij alle besprekingen constateerde men dat het voor de kandidaten heel moeilijk is om in te schatten wat zij gepresteerd hebben. Een kandidaat die bij wiskunde A de vragen 1 t/m 4, 8 t/m 12 en 15 t/m 20 goed heeft beantwoord, heeft 61% van de vragen goed en heeft toch maar 41% van de scorepunten behaald.
Algemeen vraagt men daarom ook het maximaal per vraag te behalen punten bij de opgaven te vermelden. Als in de toekomst niet meer iedere opgave even veel punten oplevert, wordt dit verzoek nog dringender.

Normering
Veel kritiek is er op een onevenwichtige verdeling van de scorepunten over het werk. De waardering is niet altijd in overeenstemming met de moeilijkheidsgraad of met de hoeveelheid werk. De tijd die nodig is voor het maken van een goede tekening wordt te weinig gehonoreerd.

Redactie
Vooral voor taalarme of allochtone leerlingen leverde de tekst van de opgaven soms problemen; bij voorbeeld havo vraag 9.

Tijdstip
Doordat wiskunde A op de laatste dag van het examen werd gehouden, kwamen nogal wat docenten in tijdnood, omdat ze naast de correctie van het eigen werk ook nog tweede correctie havo of wiskunde B en uiteraard wiskunde A kregen.
Men is bang dat het late tijdstip van het wiskunde-examen kan leiden tot kwaliteitsverlies van de (tweede) correctie.

Afronding
Men vindt het afstraffen van het niet opgeven van een antwoord met het gevraagde aantal decimalen met één scorepunt te zwaar ten opzichte van de rest van de normering.
Wederom vraagt men dit jaar de tekst 'bereken in graden nauwkeurig' te vervangen door 'bereken in gehele graden'.

Wiskunde A vwo

Men vraagt nog meer aandacht voor de formulering van de opgaven.
Sommigen missen vaste formuleringen in de vragen, waardoor er in de tekst meer handreikingen aan de leerlingen gegeven worden bij het kiezen van een methode. Vooral zwakke leerlingen hebben in de tekst bij vraag 5, 6 en 7 de methode niet herkend.
Verdere opmerkingen waren:
- de contexten zijn ondergeschikt aan de techniek,
- kansrekening en statistiek is onderbedeeld,
- bij vier of vijf kleine opgaven zijn de stapeleffecten kleiner dan bij drie grote opgaven,
- in de normering ligt een te groot gewicht op de laatste vragen per opgave,
- het correctievoorschrift is te veel naar één oplossing geschreven,
- het correctievoorschrift is te B-achtig.

Niet iedereen heeft er vrede mee dat, wanneer uit de context blijkt dat er sprake is van een maximum, er geen tekenoverzicht van de afgeleide functie is vereist.
Een advies in een van de besprekingen was: richt de bespreking tussen eerste en tweede corrector op de wijze en correctheid van het nakijken en niet op interpretatieverschillen van de opgaven.

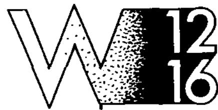
Wiskunde B vwo

Het 'onderzoek de functie' heeft een speciale betekenis. Daarom is men niet gelukkig met 'onderzoek verder' in vraag 7, waar bovendien de functies zo eenvoudig zijn dat met translaties van standaardfuncties volstaan kan worden. Ook 'onderzoek' in vraag 14 wil men vermijden.
In één van de besprekingen werd het betreurd dat delen van een functieonderzoek die niets opleveren (bij voorbeeld horizontale of scheve asymptoten) ondanks het vele werk niet beloond worden.
Evenals verleden jaar geeft men er de voorkeur aan de hoofdletter F te reserveren voor een primitieve functie. Voor de grafiek kan K_f gebruikt worden.
Sommigen vinden vraag 17 een verkeerde binnenkomer voor ruimtemeetkunde. Men was liever met vraag 19 begonnen. De beschrijving voor vraag 20 vond men te ingewikkeld. Ook werd opgemerkt dat doorstromende havo-leerlingen die bedreven zijn in het werken met vectorvoorstellingen erg bevoordeeld werden bij opgave 4. Reeds het hoekpunt O suggereerde hen het vraagstuk algebraïsch op te lossen.
Een werkblad bij opgave 4 heeft men erg gemist.

Wiskunde havo

Over het algemeen was men zeer tevreden over het examen. Men omschreef het als: leuke, originele vragen, groot beroep op inzicht, goed te maken examen. Men miste wel een functieonderzoek en standaardvragen om de zwakke, ijverige leerlingen wat meer kansen te geven.
Het grote beroep op inzicht is, zo merkte men op een bespreking op, in het voordeel van 'Kies exact'.

● Actualiteit ● ● ● ●



▶ Kolom 4

George Schoemaker

Verschillen tussen leerlingen manifesteren zich vaak in de mate waarin ze zo gek te krijgen zijn om iets met getallen, figuren of logica leuk te vinden. Zodra het lukt kinderen zo gek te krijgen, dan is de wiskunde zelf de beste context en dan zijn heksen met blokjes, rode en blauwe soldaten overbodig. Maar zodra het niet lukt leerlingen zo gek te krijgen dat ze rommelen met getallen leuk vinden, wat moet je dan?

Allereerst moet je je dan afvragen of ze dat soort sommen wel moeten leren. Sommen zoals $6 - (-3)$ zijn nu niet zinvol, als je niet van plan bent later met $x - y$ op de proppen te komen en daarin voor x en y te werven uit de gehele getallen. En als dat wel op het programma staat, dan vind ik vondsten als de heks met haar blokjes nog niet zo gek.

Ik ben banger voor contexten waarbij uit een reële situatie sommetjes met negatieve getallen rollen. Want in het dagelijks leven is de levensduur van een sommetje $6 + (-1)$ ongeveer 0 seconden. Want $6 + (-1)$ wordt dan onmiddellijk omgezet in $6 - 1$, zonder dat men zich een omzetting realiseert. En $6 - (-1)$ komt in dagelijks-leven-situaties voor als afstand op een schaal. En die is prompt $6 + 1$. De abstracte taal waarin $6 - (-3)$ geformuleerd wordt is veel moeilijker dan het probleempje waaruit de formulering zou voortkomen. Zodoende wordt de abstracte formulering niet ondersteund door de realiteit. Sterker: je gezond verstand komt in verzet tegen dit gedoe. De rechtvaardiging van een context ligt niet in de smeuigheid waarmee wiskunde slikklaar wordt gemaakt, als was het een schepje suiker bij levertraan. De rechtvaardiging van een context is gelegen in de mogelijkheid die de context biedt om er wiskunde mee te bedrijven.

Naast verschillen tussen leerlingen zijn er ook verschillen tussen docenten. Er zijn docenten voor wie het vak heel centraal staat, zoals bij voorbeeld de dichteres Ida G. M. Gerhardt. In haar 'sonnetten van een leraar' komt ze naar voren als cultuuroverdrager van de klassieke talen. Ze realiseert zich bij het bekijken van een foto van een eindexamenklas dat ze haar leerlingen nooit zo expliciet heeft opgevoed, bij voorbeeld met zoveel woorden gewaarschuwd tegen streberei. Bij wijze van inhaalmanoeuvre schrijft ze een sonnet.

BIJ EEN EINDEXAMENFOTO

Een Streber, jongens, strebt omdat hij streben moet.
Want dat is zijn natuur: zo moet een bunzing stinken.
Bijbels: hij heeft zijn ziel verkocht aan wereldsgoed.
Klassiek: hij zal zijn eigen vleugelpaard verminken.

Een Streber, jongens, strebt omdat hij streben moet.
Mocht één van jullie ooit tot dàt bestaan verzinken
– mijn klas, die ik met Plato's Phaedros heb gevoed –
Dan zie ik liever, dat hij eerlijk zal verdrinken.

Ik heb dat alles wel nooit op het bord gezet.
Ik heb het je, uit schuwheid, nooit zozeer verteld.
De ethica steeds zwijgend verondersteld.

Nu word ik achteraf door dit verzuim gekweld.
Mijn knappe klas – ik zie met zorg naar je portret.
Laat het niet nodig zijn. – Vergeef me dit sonnet.

Er zijn ook docenten die zich in eerste instantie betrokken voelen tot de leerlingen. Ze zijn primair opvoeder of metgezel, lotgenoot met opgroeiende leerlingen, zo van: Samen moeten we over de wiskundeberg heen, die is nou eenmaal zoals ie is. Beide soorten docenten zijn nodig in het wiskundeonderwijs. Beide soorten docenten moeten bereid zijn ook iets van het andere type te ontwikkelen. Moeten de begeleiders naar het lbo en de vakidioten naar het vwo? Nee toch.

● Bijdrage ● ● ● ●



▶ Welke schaduwbeelden?

Leon van den Broek

1 Inleiding

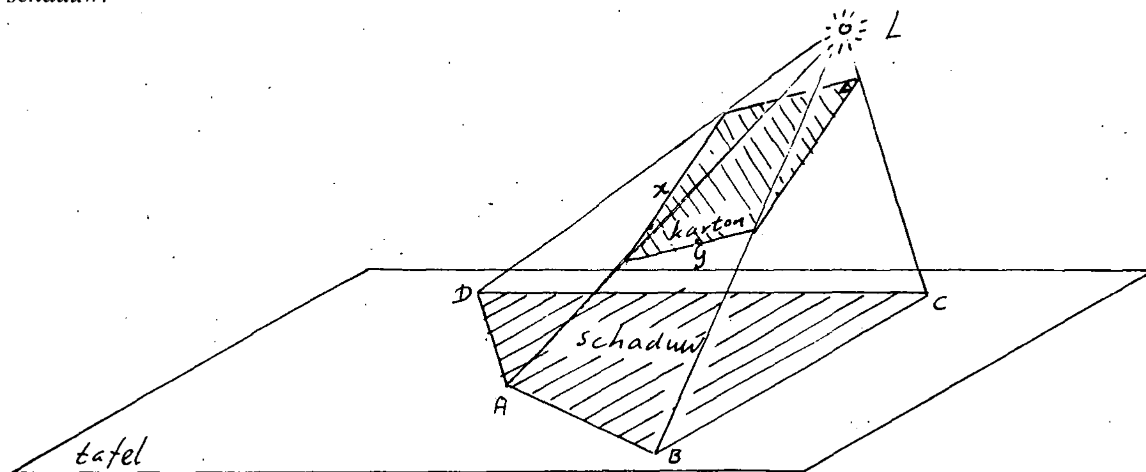
Bij ruimtemeetkunde in de bovenbouw van het vwo komt centrale projectie aan de orde. Bijvoorbeeld in de volgende opdracht.

Een rechthoekig stuk karton van 1 bij 2 dm wordt in het licht van een (puntvormig) lampje gehouden. Het karton werpt een schaduw op tafel. Onderzoek welke van de volgende vierhoeken kunnen optreden als schaduw.

In dit artikel behandel ik welke schaduwvormen er allemaal mogelijk zijn. Bij een gegeven schaduw zal ik constructief aangeven waar het lampje geplaatst kan worden en op welke hoogte en in welke stand het karton in het lamplicht moet worden gehouden. Uiteraard kan een schaduw niet gekregen worden als het karton te groot is. Ik zal uit de schaduw afleiden wat de maximale afmetingen van het karton zijn.
Wellicht is dit onderwerp rijk genoeg voor een werkstuk ruimtemeetkunde (schoolonderzoek ?).

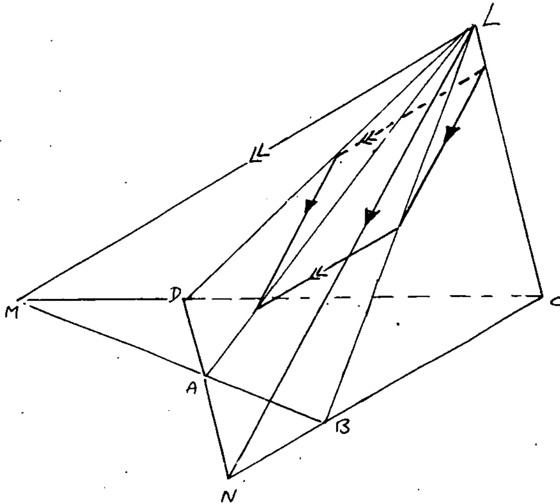
2 De probleemstelling

Op een tafel is een vierhoek gegeven. Verder hebben we een mobiel lampje L en een rechthoekig karton met zijden x en y. We proberen de vierhoek als schaduw te krijgen. Waar moeten we het lampje plaatsen en hoe moeten we het karton houden?
'Wiskundiger' geformuleerd: Van een piramide is het grondvlak $ABCD$ gegeven. Gevraagd wordt de top L zodat de doorsnede van een zeker vlak met de piramide $L \cdot ABCD$ congruent is met het karton.

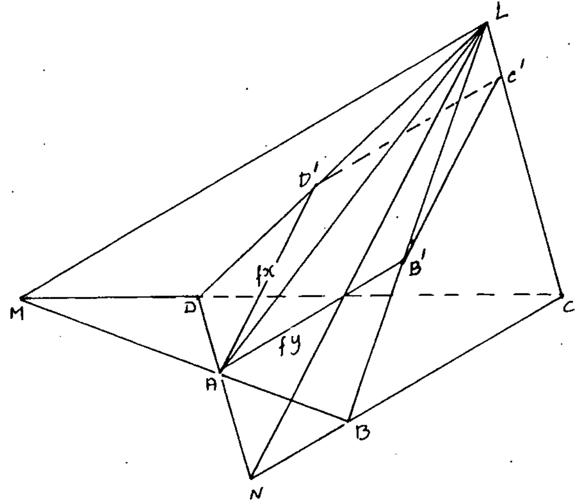


Figuur 1

3 Analyse van het probleem

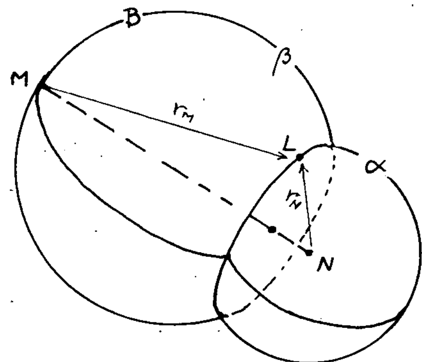


Figuur 2



Figuur 3

Het snijpunt van AB en CD noemen we M, dat van AD en BC noemen we N. (Het geval dat een van de paren lijnen evenwijdig is, wordt verderop behandeld.)
Bekijk de drie vlakken: MBL, MCL en het karton. Twee van hun snijlijnen, namelijk de zijden van het karton, zijn evenwijdig. Volgens de drievlakkenstelling zijn dan alle drie de snijlijnen evenwijdig. Dus moet het karton evenwijdig zijn aan de derde snijlijn: LM. Evenzo moet het karton evenwijdig zijn aan LN. Dit levert een eis op voor de plaats van het lampje. Immers, het karton is een rechthoek. Dus moet L zó gekozen worden dat $LM \perp LN$. Hieruit volgt (stelling van Thales) dat L op de bol β met middellijn MN moet liggen.
Kies nu een plaats voor L op β. Omdat het karton evenwijdig moet zijn aan LM en aan LN, zoeken we een doorsnede, zeg $A'B'C'D'$, die evenwijdig is aan vlak LMN. Al zulke doorsneden zijn onderling gelijkvormige rechthoeken. Het probleem is nog L zó te bepalen dat de doorsneden gelijkvormig zijn met het gegeven karton (met zijden x en y). Door later met een geschikte factor vanuit L te vermenigvuldigen krijgen we dan de juiste plaats voor het karton.
We nemen voor het gemak: $A' = A$. AB' en AD' moeten zich verhouden als $x:y$. Zeg dat $AB' = f \cdot y$ en $AD' = f \cdot x$ (x en y kunnen ook verwisseld worden).
ADD' en NDL zijn gelijkvormig. Hieruit volgt: $LN = f \cdot x \cdot DN/DA$. L ligt dus op de bol met middelpunt N en straal $r_N = f \cdot x \cdot DN/DA$.
Evenzo ligt L op de bol met middelpunt M en straal $r_M = f \cdot y \cdot BM/BA$.
De verhouding $r_N : r_M = x/y \cdot DN/DA \cdot BA/BM$ ligt vast (gegeven de schaduw en het karton). De verzameling α van alle punten X waarvoor $XN : XM = r_N : r_M$ is een bol (de zg. bol van Apollonius), tenzij $r_N : r_M = 1$. Als $r_N : r_M = 1$ is α het middelloodvlak van MN. Opdat $AB'C'D'$ gelijkvormig is met het karton, moet L dus op α liggen.



Figuur 4

4 De constructie

α en β snijden elkaar volgens een cirkel. Kies voor L een punt van die snijcirkel, dat boven de tafel ligt. Doorsnijd de piramide $L \cdot ABCD$ met het vlak door A, evenwijdig aan vlak LMN. De doorsnede $AB'C'D'$ is een rechthoek (omdat L op β ligt) met zijden die zich verhouden als $r_N : r_M$ (omdat L op α ligt).
Zij nu $f = LN/x \cdot DA/DN$ $(= LM/y \cdot BA/BM)$. Vermenigvuldig $AB'C'D'$ met factor $1/f$ vanuit L. Dan is het vermenigvuldigbeeld de plaats voor het karton.

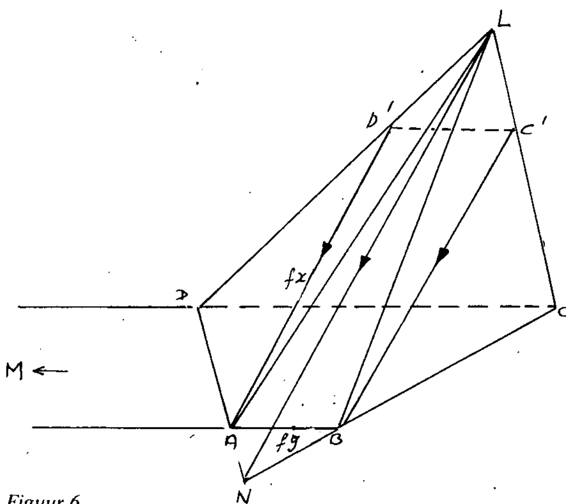
5 Discussie

De constructie van het punt L en bijbehorende positie van het karton is dus in het algemeen altijd mogelijk. Er zijn zelfs oneindig veel oplossingen. Wil echter de constructie uitvoerbaar zijn met een echte materiële tafel, dan moeten we voorkomen dat de gezochte plaats van het karton te laag komt, d.w.z. in de tafel steekt. Dit betekent dat het getal f groter dan of gelijk aan 1 moet zijn.
Uit de stelling van Pythagoras volgt ($\angle MLN$ is recht):
$MN^2 = LM^2 + LN^2 =$
$= f^2 \cdot ((y \cdot BM/BA)^2 + (x \cdot DN/DA)^2)$.
$f \geq 1 \Leftrightarrow MN^2 \geq y^2 \cdot (BM/BA)^2 + x^2 \cdot (DN/DA)^2 \Leftrightarrow$
$1 \geq y^2 \cdot (1/MN \cdot BM/BA)^2 + x^2 \cdot (1/MN \cdot DN/DA)^2$.

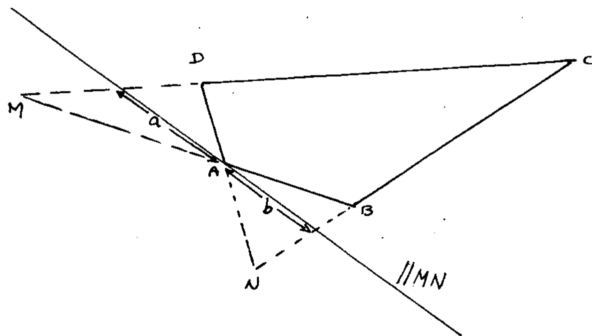
In figuur 5 is de lijn door A parallel aan MN getrokken. Laat a en b de aangegeven lengten zijn. Dan kunnen we de laatste ongelijkheid ook zó schrijven: $1 \geq (x/a)^2 + (y/b)^2$ of, met x en y verwisseld, $1 \geq (x/b)^2 + (y/a)^2$.
Hieraan is voldaan als het karton 'niet te groot' is: het moet passen in het gearceerde kwart van de ellips in figuur 5.

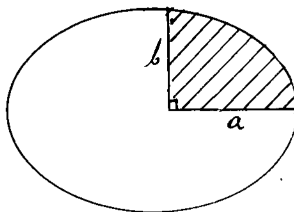
6 Als de schaduw één paar evenwijdige zijden heeft

Onderstel dat AB evenwijdig is met CD. Het punt M in bovenstaande analyse ligt dan 'oneindig ver weg'. Analoge behandeling van dit geval leidt tot het volgende.



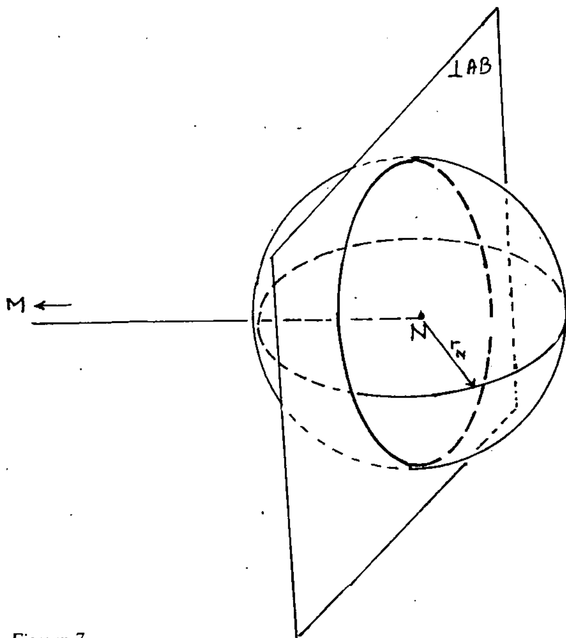
Figuur 6





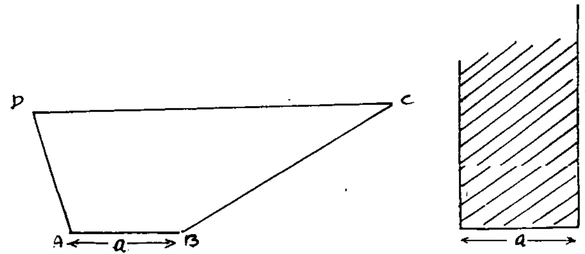
Figuur 5

– Uit de drievlakkenstelling volgt dat het karton evenwijdig moet zijn aan AB en CD en aan LN. Voor het gemak nemen we de doorsnede parallel aan AB en LN, die door AB zelf gaat.
– Opdat deze doorsnede $ABC'D'$ een rechthoek is, moet L liggen in het vlak door N dat loodrecht staat op AB en CD.
– Opdat $ABC'D'$ gelijkvormig is met het karton met zijden x en y, moet L liggen op de bol met middelpunt N en straal $r_N = f \cdot x \cdot DN/DA = x/y \cdot AB \cdot DN/DA$. Hierbij mogen x en y verwisseld worden.
– Als $ABC'D'$ eenmaal gevonden is, krijgen we de positie voor het karton door deze doorsnede te vermenigvuldigen met factor $1/f$ vanuit centrum L.



Figuur 7

Ook in dit geval zijn er oneindig veel plaatsen voor het lampje met bijbehorende positie van het karton. De voorwaarde voor de praktische uitvoerbaarheid luidt nu zó: $f \geq 1 \Leftrightarrow AB \geq y$ of $AB \geq x$. Dat wil zeggen dat het gegeven karton moet passen in de oneindige strook van breedte a (figuur 8). Je kunt dit geval zien als een ontaarding van het vorige, namelijk voor $b \to \infty$.



Figuur 8

7 Als de schaduw een parallellogram is

Bij centrale projectie zijn de schaduwen van twee evenwijdige lijnen alleen dan evenwijdig als de twee lijnen evenwijdig aan het tafereel (de tafel) lopen. Hieruit volgt:
1) als het karton met één paar zijden evenwijdig aan de tafel wordt gehouden, is zijn schaduw een trapezium, maar geen parallellogram; dit geval hebben we zojuist behandeld,
2) als het karton met geen enkele zijde parallel aan de tafel wordt gehouden, heeft zijn schaduw geen evenwijdige zijden; ook dit geval hebben we al behandeld,
3) als het karton evenwijdig aan de tafel wordt gehouden, is de schaduw een rechthoek, gelijkvormig met het karton zelf. Zo'n rechthoek is dus het enig mogelijke parallellogram dat als schaduw kan optreden.

8 Conclusies

Als de te vormen schaduw geen parallellogram is, is de constructie altijd mogelijk; er zijn zelfs oneindig veel oplossingen. De voorwaarde dat de schaduw praktisch realiseerbaar moet zijn, laat zich fraai uitdrukken in 'het karton moet passen in...'.
Als de te vormen schaduw een rechthoek is, die gelijkvormig is met het karton, zijn er oneindig veel oplossingen. De schaduw is praktisch realiseerbaar als het karton past in de schaduw.
Als de te vormen schaduw een rechthoek is, die niet gelijkvormig is met het karton, is de constructie onmogelijk.
Als de te vormen schaduw een niet-rechthoekig parallellogram is, is de constructie ook onmogelijk.

● **Bijdrage** ● ● ● ●

▶ Het bedrijfsleven als alternatief

voor leraren wiskunde/natuurkunde/scheikunde

F. Dekkers, L. Kuyk, J. Slavenburg

Een korte samenvatting van resultaten van een enquête onder afgestudeerden van en studerenden aan de 2e-graads voltijd-leraren-opleidingen in de vakken wiskunde, natuurkunde en scheikunde.

1 Inleiding

Na een aantal telefonische en schriftelijke contacten van diverse (toenmalige) hoofddocenten van NLO-en met de Inspectie Opleidingen over de problematiek van een dreigend c.q. bestaand tekort aan 2e-graads bevoegde leraren voor de vakken wiskunde, natuurkunde en scheikunde, vond er op 3 juni 1987 een gesprek plaats te Utrecht van enkele inspecteurs en een delegatie van de hoofddocenten van de betrokken vakken. Op dat moment waren zeer recente ramingen vanwege het Ministerie van O & W beschikbaar met betrekking tot de behoefte aan 2e-graads leraren in de jaren negentig. Alle deelnemers waren het er over eens dat er sprake lijkt te zijn van een zodanig ernstige situatie bij de vakken wis-, natuur- en scheikunde dat gezocht moet worden naar maatregelen om te bewerkstelligen dat méér personen zich aanmelden voor de opleiding tot leraar èn dat zij na voltooiing van hun opleiding ook daadwerkelijk in het onderwijs gaan werken. In dat verband werd door de aanwezige hoofddocenten een aantal veronderstellingen in de genoemde notitie nogal optimistisch genoemd, met name betreffende het percentage van de afgestudeerden die een werkkring buiten het (2e-graads) onderwijsveld zoeken. Teneinde met meer klem te kunnen vragen om aandacht en maatregelen werd het nuttig geacht te beschikken over redelijk recent cijfermateriaal betreffende de uitstroom. Vanwege de specifieke situatie van de voltijd-opleiding (2-vakkensysteem) en de wens op korte termijn over resultaten te beschikken zijn alleen de voltijd-opleidingen bij de enquête betrokken.
Deze samenvatting bevat een globaal overzicht van de belangrijkste resultaten, niet uitgesplitst naar instelling of anderszins.

2 Uitvoering

De vakgroepleiders (hoofddocenten) wis-, natuur- en scheikunde van het voormalig Moller-instituut (nu opgenomen in de Faculteit Educatieve Opleidingen van de Hogeschool Katholieke Leergangen Tilburg) hebben de coördinatie op zich genomen. Vlak voor de zomervakantie zijn aan alle instellingen (voormalige zgn. nieuwe leraren-opleidingen) brieven verzonden met het verzoek hun afgestudeerden vanaf het kalenderjaar 1982 tot en met juli 1987 te enquêteren met betrekking tot de vraag of men in het onderwijs werkt en hoe groot in dat geval de omvang van de betrekking is (het aantal wekelijks gegeven lessen), dan wel of men een baan heeft of zoekt buiten het onderwijs.
Daarnaast werd de huidige studenten gevraagd naar hun toekomstplannen. In de afgelopen maanden zijn de resultaten globaal verwerkt en geconfronteerd met getalsmatige gegevens en prognoses van het CBS (inschrijvings-aantallen o.a.), het Ministerie van Onderwijs/Ned. Econ. Instituut (de toekomstige vraag naar leraren per vak) en de universiteiten (inschrijvingen lerarenopleiding eerste graad).

3 Resultaten

3.1 *Afgestudeerden*
Totaal aantal respondenten: 595
Bij de tellingen zijn een aantal afwijkende antwoorden als volgt ingedeeld:
- lessen Warenkennis: meetellen als Scheikunde (bij combinatie scheikunde/huishoudkunde: verdelen over bevoegdheden)
- lessen Kennis der Natuur en Oriëntatie op de natuur: meetellen bij de bevoegdheid natuurkunde c.q. scheikunde c.q. biologie; indien bevoegd in twee van deze vakken: het aantal lessen over beide vakken verdelen.
- lessen Informatica, studielessen en andere: niet meetellen bij het aantal lessen van de vakken waarin men bevoegd is, wel bij de totaal gemiddelde betrekkings-omvang.
- indien aantal lessen niet ingevuld: neem 20
- indien niet is ingevuld hoeveel lessen in welk vak, dan verdelen naar evenredigheid.
- werkzoekend expliciet buiten het onderwijs: aanmerken als werkend buiten het onderwijs.
- verder studerend voor 1e graad, of een andere voltijdstudie: aanmerken als werkend buiten het (2e graads) onderwijs
- werkzoekend, niet aangegeven binnen of buiten het onderwijs: aanmerken als werkzoekend binnen onderwijs
- militaire dienst: aanmerken als werkzoekend binnen het onderwijs (tenzij anders vermeld)

Globale resultaten voor alle drie de vakken samen zijn vermeld in de volgende tabel.
Van de afgestudeerden uit de jaren '82 t/m '86/87 blijkt dus een percentage van 35,4 niet beschikbaar te zijn voor een betrekking in het 2e graads-onderwijsveld.

afgestudeerden	aantal	percentage
werkzoekend in het onderwijs:	39	6,6%
werkzoekend expliciet buiten het onderwijs:	18	3,0%
werkzaam in het onderwijs:	345	58,0%
werkzaam buiten het onderwijs:	193	32,4%
	595	100 %

Van de respondenten die nog geen werk hebben zijn de meesten vrij recent afgestudeerden, van wie een aantal hun militaire dienstplicht vervullen, dan wel aan een vervolgstudie (vaak in het wetenschappelijk onderwijs) bezig zijn.

Vervolgens: van degenen die werkzaam zijn in het onderwijs is de gemiddelde omvang van de betrekking: 23,1 lessen/week (standaard-deviatie 6,3).

Opmerkelijk is dat van degenen die afstudeerden ná 01-04-85 – de datum waarop de nieuwe salarisregeling in het onderwijs van kracht werd – een groter percentage buiten het onderwijs gaat werken dan vóór die tijd.

3.2 *Studerenden*
Aantal respondenten: 512
Opmerking: het gaat hier om zgn. halve studenten; omdat er ook studenten zijn met combinaties buiten de drie vakken waar dit onderzoek betrekking op heeft, mogen de aantallen per vak niet zonder meer getotaliseerd worden. We volstaan dan ook met percentages.

Studerend	Wisk.	Natk.	Scheik.
1 Gaat zeker in 't onderwijs werken	95 = 21%	63 = 20%	21 = 19%
2 Gaat waarschijnlijk in 't onderwijs werken	228 = 51%	159 = 50%	59 = 52%
3 Gaat waarschijnlijk niet in 't onderwijs werken	96 = 22%	75 = 24%	27 = 24%
4 Gaat zeker niet in 't onderwijs werken	26 = 6%	18 = 6%	6 = 5%
	444 = 100%	315 = 100%	113 = 100%

● Werkblad ●

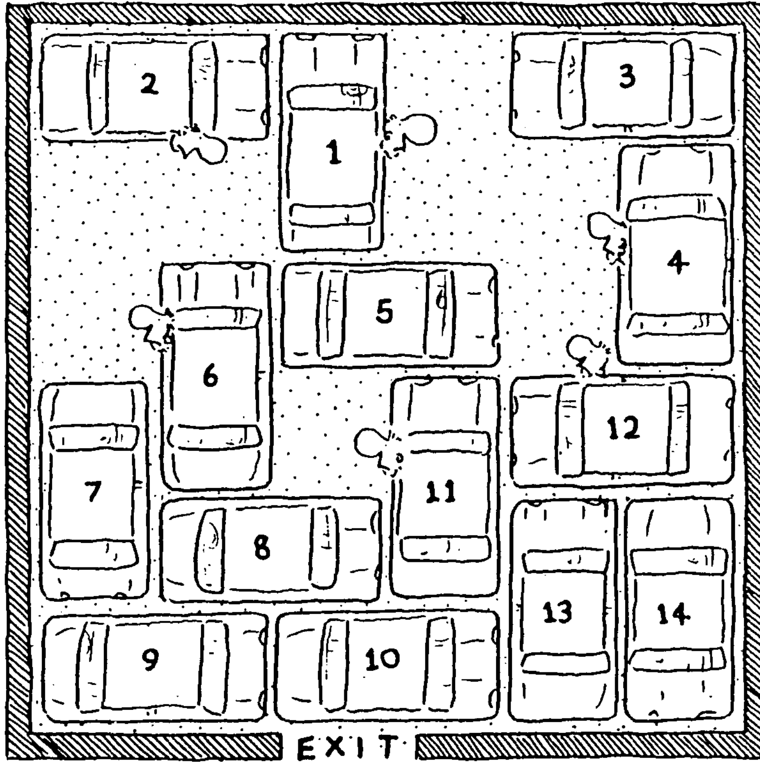
▶ Verrassingen in aftreksommen

Kies willekeurig vier getallen onder de 10, zoals 3, 6, 2, 8, en vorm hiervan het grootste getal dat mogelijk is (8632) en ook het kleinste getal dat mogelijk is (2368).
Trek het kleinste getal af van het grootste:
8632 – 2368 = 6264
Herhaal vervolgens de handeling met de getallen die in de uitkomst voorkomen: (6, 2, 6, 4):
6642 – 2466 = 4176
Doe dit nogmaals:
7641 – 1467 = 6174
In dit voorbeeld komen de getallen 1, 4, 6, 7 weer tevoorschijn in de uitkomst. Als je verder zou gaan, zou je steeds deze getallen krijgen.

Onderzoek wat er gebeurt als je met een ander viertal getallen onder de 10 begint, en doorgaat met aftrekken totdat er geen nieuwe getallen meer verschijnen. Wat zie je gebeuren?
Wat is de langste serie aftrekkingen die je kunt vinden voordat er geen nieuwe getallen meer voorkomen?

Als je ergens een 0 krijgt, moet je het kleinste getal dat je moet vormen, laten beginnen met een 0.

Brian Bolt, Mathematical activities
© Cambridge University Press, 1982



▶ De verstopte parkeergarage

Een kleine parkeergarage is verstopt geraakt: niemand kan er nog uit. Toch moet auto 1 vertrekken, en wel zonder dat de andere auto's de garage verlaten.
De auto's kunnen in de garage alleen maar recht vooruit of recht achteruit. Door een aantal auto's te verplaatsen kan auto 1 de garage uitrijden.
Schrijf op welke verplaatsingen nodig zijn, en doe dat zó dat het totale aantal verplaatsingen zo klein mogelijk is.

Brian Bolt, Mathematical activities
© Cambridge University Press, 1982

We zien dat bij een groepering van categorieën 1 en 2 enerzijds en 3 en 4 anderzijds, de percentages bij de studerenden corresponderen met die van de afgestudeerden.

4 Conclusies

De getallen spreken voor zich. Met name blijkt dat een aantal veronderstellingen die de opstellers van de prognose-notitie van O & W gehanteerd hebben, voor deze drie vakken waarschijnlijk moet worden bijgesteld. (Brief Minister van O&W aan de HBO-raad, kenmerk DI/SC/OVO/BZ/A-159.167 dd. 14 mei '87 en idem, kenmerk DI/SC/OVO/BZ/A-159.266 dd. 12 juni '87). Met name:

1 Het percentage afstuderenden dat niet in het onderwijs gaat werken moet voor de tweede-graads opleidingen in plaats van op 10% gesteld worden op 35,4%; op basis van hetgeen bij studieleiders bekend is, en ook vanwege de Algemene Beroepenvariant c.q. Vrije studierichting kan dit percentage gevoeglijk ook voor de deeltijd-opleidingen worden gehanteerd.

2 Er is een frictie-werkloosheid (waarin ook mil. dienst verwerkt is) van 6,6% bij degenen die in het onderwijs willen werken.

3 Door de lage werkloosheid is er geen sprake van een 'stuwmeer' van waaruit vrijkomende vacatures anders dan door pas afgestudeerden worden vervuld. Dit blijkt ook uit de veelvuldige verzoeken die directeuren van scholen aan de hoofddocenten richten m.b.t. namen van (pas of binnenkort) afstuderenden. Uit de enquête blijkt bovendien dat de 'stroom' de andere kant op gaat: een aanmerkelijk aantal afgestudeerden die aanvankelijk voor het onderwijs kozen verruilen na een of enkele jaren de school voor een baan bij het bedrijfsleven.
Toch zal een gering gedeelte van vrijkomende vacatures niet door pas afgestudeerden worden opgevuld (door her-intredende vrouwen – hoewel die er bij deze vakken potentieel niet veel zijn –, door het toekennen van overuren, door zgn. slapende bevoegdheden die weer wakker worden, e.d.). Dit percentage stellen we op 10% (in plaats van de 25% van O&W).

4 De gemiddelde betrekkings-omvang moet aan de hand van de verkregen resultaten per vak worden aangepast; ook voor deeltijd-afgestudeerden in deze exacte vakken zal de omvang van de baan wat hoger liggen dan bij andere vakken; we stellen deze voor alle drie de vakken bij deeltijd op gemiddeld 22 lesuren/week.
Verder kan, met behulp van de cijfers over
– de instroom in het eerste cursusjaar in 1986 (deze zijn bijv. te vinden in het HOOP, dl. 2 pag. 99 t/m 106) en
– het uitvalpercentage per vak
berekend worden hoeveel van de recent nlo-afgestudeerde leraren met bevoegdheid in de vakken wiskunde, respectievelijk natuurkunde en scheikunde zich in 1991/1992 zullen melden voor een baan in het 2e-graads onderwijsveld, en idem van de deeltijd-opgeleide leraren.
Dit plaatsen we naast de beschikbare prognose-cijfers van O&W over de behoefte aan leraren in 1993, zodat duidelijk wordt hoeveel leraren er dan te weinig zullen zijn indien de instroom van eerstejaars de komende jaren niet groeit.
Let wel: de uitkomsten gelden per jaar, dus bij een tekort aan instroom van bijvoorbeeld vier jaar lang moeten de getallen met vier vermenigvuldigd worden!
Tenslotte becijferen we de situatie voor 1988/1989 voor het eerstegraads onderwijsveld, op basis van de instroom dit jaar in de nieuwe tweede-fase universitaire leraren-opleiding en de instroom in 1985 in de drie-jarige eerste-graads deeltijd-opleiding.

Voor de vervangingsvraag kunnen we ons op dit moment uitsluitend baseren op de cijfers uit 'TEASE-85' tabel 10, waar slechts de vervangingsvraag voor afgestudeerden van de universitaire lerarenopleidingen wordt gepresenteerd. Met de uitstroom van de eerste-graads deeltijd-opleidingen is daar geen rekening mee gehouden. Het totale aantal vacatures voor de drie vakken is nu nog niet te achterhalen. De hierna bij 'vraag in '88' gehanteerde cijfers zijn dus zeer waarschijnlijk nog te laag. Binnenkort zal O&W met nadere cijfers komen.

N.B. De effecten van de in december '87 bekend gemaakte nieuwe mogelijkheden voor (deeltijd-) VUT voor leraren en schoolleiders zijn *niet* in deze berekeningen meegenomen.

2e graads-gebied

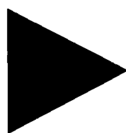
	wisk.	natk.	scheik.	
instroom '86				
(personen) voltijd	274	166	86	
deeltijd	486	86	28	
geeft *aanbod* in '90/'91 in leraar-lessen	5285	1305	524	
vraag in '93 *in leraar-lessen*	6498	2988	1656	(1)
TEKORT				
leraarlessen	1213	1683	1132	
= aantal personen	55	77	51	(2)
tekort instroom				
voltijd				
(personen)	118	225	170	(3)
(percentueel)	43%	136%	198%	
deeltijd				
(personen)	76	106	71	
(percentueel)	15%	123%	253%	

(1) 90% van de vrijkomende vacatures (op te vullen door pas afgestudeerden)
(2) met een betrekking van gemiddelde omvang van 22 lessen/week
(3) bij een veronderstelde 50/50 verdeling over voltijd en deeltijd van de uitstroom

1e graads-gebied (inclusief HBO)

	wisk.	natk.	scheik.	
instroom (personen)				
voltijd '87	8	0	0	(univers.)
deeltijd '85	67	16	13	(DAV-1)
geeft *aanbod* in '88/'89 (personen)	43	9	9	
vraag in '88 *in personen*	104	123	14	
TEKORT				
uitstroom	61	114	5	(personen)

Over de auteurs:
Drs. F. Dekkers (natuurkunde), Drs. L. Kuijk (wiskunde) en Dr. J. H. Slavenburg (scheikunde), schrijven dit namens de landelijke hoofddocentenberaden van de voltijd- 2e graads lerarenopleidingen wiskunde, natuurkunde, scheikunde.



Boekbespreking

Proceedings First International Conference on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM 87), Contributions of the Netherlands, Paris 1987 (A. H. P. van der Burgh and R. M. M. Mattheij, eds.), 433 pag.

In juni 1987 vond in Parijs het eerste Internationale Congres voor Toegepaste en Industriële Wiskunde plaats. Het congres telde 1800 deelnemers uit bijna alle landen, waaronder 50 Nederlanders. De bijdrage uit ons land heeft een opvallende plaats gekregen, omdat alleen de Nederlandse bijdrage in gebundelde vorm op het congres verkrijgbaar was. Dit is te danken aan het initiatief van de redacteuren Dr. A. H. P. van der Burgh (TU Delft) en Dr. R. M. M. Mattheij (TU Eindhoven) met morele en financiële steun van het Wiskundig Genootschap.
Een (beperkt) aantal exemplaren van het boek is beschikbaar voor belangstellenden. In een omvang van 433 pagina's treft men onderwerpen aan als trillingen van hoogspanningsleidingen, het leggen van off-shore pijpleidingen, controle en signaalverwerking onder andere benut voor de Philips Compact Disc, meteorologische modelproblemen en vele andere toegepaste wiskunde zaken.
We hebben hier een unieke manier om (op goedkope wijze) kennis te maken met de huidige industriële en toegepaste wiskunde in ons land. De redacteuren hebben de uitgeverij Epsilon Uitgaven gevraagd om zorg te dragen voor verzending en administratie en gezien het algemene belang van het boek voor toepassingsgericht onderzoek heeft de uitgeverij hier mee in gestemd. Het boek is uitsluitend te verkrijgen door het overmaken van *f* 25,– (voor leden van het Wiskundig Genootschap *f* 15,–) op postrekening 5660167 van Epsilon Uitgaven te Utrecht onder vermelding 'Proceedings'. U krijgt het werk dan toegestuurd.

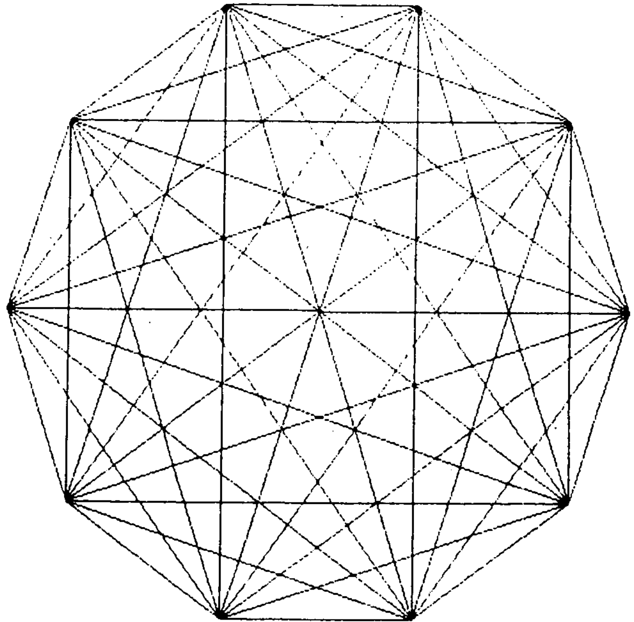
Dr. F. Verhulst, redactie Epsilon Uitgaven

● Shortliner ●

▶ Een regelmatige veelhoek

Het bijgaande programma is een hulpmiddel, niet meer en niet minder. De listing laat al zien wat er gebeurt: op het scherm zal een regelmatige veelhoek verschijnen.
In een artikel van Douwe Kok en Cor van der Pijl (in het volgende nummer) wordt verteld over het werken met dit programma in de klas.
Dat het programma in GWBasic geschreven is, is zoals steeds een kwestie van pragmatisme. Basic is immers door iedereen bruikbaar, op elke machine. Misschien is er een kleine aanpassing nodig van de listing bij WINDOW (regel 30), om een mooie 'ronde' figuur te krijgen.

```
1 PI=3.14159
10 CLS
20 SCREEN 2
30 WINDOW (-1.4,-1)-(1.4,1)
35 INPUT"aantal hoekpunten? ",N
36 CLS
40 FOR A=1 TO N
50   FOR K=A TO N
60      X1=COS(A*2*PI/N):Y1=SIN(A*2*PI/N)
70   X2=COS(K*2*PI/N):Y2=SIN(K*2*PI/N)
80     LINE (X1,Y1)-(X2,Y2)
90   NEXT K
100 NEXT A
```



● Serie ● ● ● ● ●

'Auteurs in beeld'

▶ Moderne wiskunde

Schrijven is lijden.
Maar leuk lijden.

Amersfoort, een mooie zonnige namiddag. Een klein zaaltje in het souterrain van het Berghotel. Aanwezig: twee auteurs, een uitgever, een interviewer. De bandrecorder op tafel – twee uur praten over *Moderne Wiskunde*.

Wat beweegt een mens om mee te schrijven aan een wiskunde-methode?

Wim Groen
Ik ging op een gegeven moment aan de VU werken als assistent van Troelstra. Die was auteur van *Moderne Wiskunde* en betrok mij erbij: wat vind jij, zou dat niet anders kunnen? Dat viel blijkbaar in goede aarde. Want ik werd al gauw gebeld door Wolters-Noordhoff.

Wim Visser
Je loopt ertegen aan. En op dat moment denk je: ik ben zelf leraar, ik wil die leermiddelen zo goed mogelijk hebben. En dan herinner je je allerlei dingen uit je lespraktijk. Je gaat er eens over nadenken: dat loopt niet in de klas en dat wel. Hoe komt dat nou?

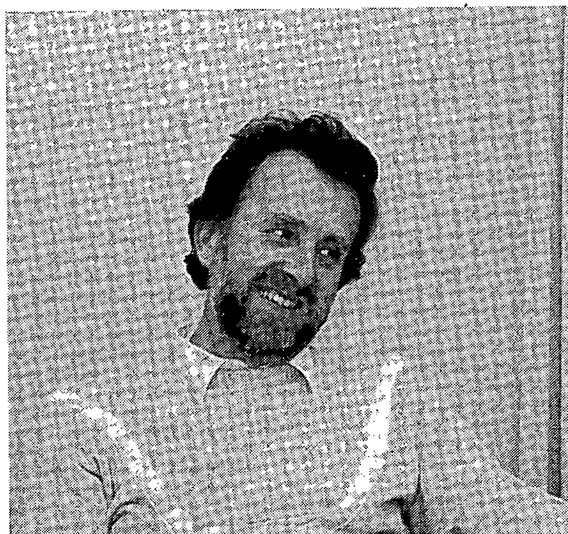
Het rare is: zo'n hoofdstuk, dat is een hele belasting, maar er gaat toch ook een zekere verslaving van uit.

De gelegenheid maakt de auteur?

Wim Groen/Wim Visser
Ja, ja.

En dan komt er een heleboel werk op je af. Want het moet allemaal naast het gewone werk.

Wim Visser
In het begin valt het wel mee. Pas in de produktiefase gaan vrouw en kinderen meelijden. Als er besloten is: dan en dan moet er een boek zijn, dan heb je een molensteen om je nek.



Auteur Wim Groen: *... heftige perioden ...*

Wim Groen
Toen de huidige auteursgroep aan de bovenbouwdelen begon – dat was in '80 – dat was spannend. Er kwam een nieuw leerplan, niemand wist precies waar het heen zou gaan. En iedereen in de groep praatte maar. Meersporige aanbiedingen, van alle kanten aanvliegen, allerlei mooie theorieën. Ik zat ook aan die tafel, geleerd kijken natuurlijk. Maar ten slotte moest er wat gebeuren – en daar zag ik met grote angst tegenop, hoor. Het eerste half jaar had ik van die vlagen: over veertien dagen moet ik mijn hoofdstuk af hebben. In de auto, onder de douche. Het zeurt maar door.

Wim Visser
Ja, als je om je heen kijkt of je zit in de trein of je bent met vakantie, dan denk je wel eens: dat zou je kunnen gebruiken voor een opgave, dat is aardig.

Wim Groen
Je leest de krant ook anders. Toepassingen worden tegenwoordig in het wiskunde-onderwijs heel belangrijk gevonden, en juist de toepassingen die zo echt mogelijk zijn, niet bedacht zijn... Je slaat de krant op, je denkt hé, dat is aardig.

5 Bierkenners falen deerlijk in test

werd aangezien voor:	**Bavaria**	**Heineken**	**Grolsch**	**Brouwers**	**Hertog Jan**
Bavaria	16	19	15	19	19
Heineken	20	18	14	17	16
Grolsch	19	15	24	9	18
Brouwers Bier	18	16	16	20	16
Hertog Jan	12	17	16	20	16



Wordt het verschil in smaak en aroma van biersoorten door proevers waargenomen? Of is alle bier 'één pot nat'? Deze vraag stelt de journalist Richard Schimmelpennink in het dagblad '*Het Parool*' van 9 mei 1984.
Zijn artikel doet verslag van een 'nationale biertest' gehouden op Koninginnedag. De matrix hierboven is ontleend aan de gegevens van dat artikel, ze bevat telkens het aantal malen dat het merk in de kolom werd aangezien voor het merk in de rij. Heineken werd bijvoorbeeld 15 maal aangezien voor Grolsch. In totaal hebben 85 Nederlanders geprobeerd om vijf verschillende biermerken uit elkaar te houden.

a Het merk Heineken werd 85 keer aangeboden, zo blijkt uit de matrix. Neem eens aan dat alle deelnemers genoodzaakt waren om te raden en dat elk merk – telkens als het geschonken werd – een kans had van $\frac{1}{5}$ om goed geraden te worden. Hoe vaak wordt Heineken dan, naar verwachting, aangezien voor Heineken?
Zijn er redenen om aan te nemen dat de proevers niet steeds geraden hebben?

b Neem aan dat aan de deskundigheid van de proevers niet behoeft te worden getwijfeld. Kan dan één der merken aanspraak maken op een eigen identiteit?

Wim Visser
Alleen, daarna moet je zo'n hoofdstuk in elkaar gaan zetten, dan gaat het anders. Heb jij dat nooit gehad, Wim, die nervositeit, niet willen beginnen, achter je bureau gaan zitten, weer weglopen. En ondertussen borrelt het hè, ben je bezig.

Wim Groen
Ja, maar dat is ook iets dat je afleert. Ik ben daar tegenwoordig veel lakonieker onder. In het begin heb je het gevoel: die eerste regel moet meteen in orde zijn. Tegenwoordig begin ik maar en op zeker moment ligt daar een ruwe tekst. Die laat je twee dagen liggen en dan denk je: dat heb ik goed opgeschreven. En als je dan in de groep komt, blijkt er toch nog van alles aan te mankeren. Ik heb nog wel nodig dat het volgende week af moet. Ik wacht tot de laatste week en dan moet het klaar.

Nol van 't Riet
Ik ken een auteur, elke dag als hij thuis kwam stond het volgende kopijblad in zijn typemachine en dan maakte hij precies één bladzij. Zo kwam ie aan dertig bladzijden per maand.

Wim Visser
Nee, bij mij is het keutelen van groot belang. Je zit te wikken en te wegen, je noteert es wat. Je trekt es een boek van de plank. Dat is de incubatietijd die je nodig hebt voordat je iets op papier zet.

Het betekent dat je leven in het teken gaat staan van het schrijven.

Wim Visser
Ja. En dat je je in die laatste fase sociaal isoleert. Gaat de bel – ik blijf boven. Mijn vrouw vindt dat niet altijd leuk.

Die openheid is heel aardig gerealiseerd in de brugklasdelen. Maar in de tweede klas werpt het examen zijn schaduwen vooruit.

Wim Groen
Nou... Ik heb mijn vrouw wel eens gevraagd een paar dagen te gaan logeren. Want hoe gaat het als je thuis werkt? Ontbijten, de krant lezen, koffie drinken. Als ik alleen thuis ben, dan zit ik 's morgens vroeg achter mijn bureau en dan kom ik niet van die kamer af. Dan werk ik tot 's avonds twaalf uur door. Ik concentreer het in dat soort heftige perioden, daardoor heb ik er in mijn persoonlijk leven niet zo'n last van.

Nol van 't Riet
Zoiets als het 'pieken' van de topsporter?

Wim Groen
Er zit niks anders op. Het rare is: zo'n hoofdstuk, dat is een hele belasting, maar er gaat toch een zekere verslaving van uit.

Hoe is *Moderne wiskunde* geworden wat het is?

Nol van 't Riet
De moderne wiskunde is ongeveer in '65 begonnen en in '68 echt ingevoerd. Van *Moderne wiskunde* zijn er drie edities geweest die door vrijwel dezelfde groep mensen zijn gemaakt. In '77 is begonnen aan iets heel nieuws. Er is toen een gedeeltelijk nieuwe groep auteurs gezocht. Die vierde editie – voor de onderbouw – is in '81 verschenen. In de bovenbouw was de aanleiding voor de herziening een nieuw leerplan. In de onderbouw was er niet zo'n directe aanleiding.

We bieden geen hapklare brokken, maar we proberen tot nadenken te prikkelen.

Wim Groen
Nou, je had in '68 de mammoet-wet gekregen; waardoor die brugklas sterk heterogeen werd en de behoefte ontstond om intern te differentiëren. In het begin van de jaren '70 kreeg je het beroemde basisstof, herhalingsstof en verrijkingsstof-model. Troelstra heeft dat van meet af aan een slecht model gevonden. Hij had een methode voor ogen waarmee kinderen van verschillende begaafdheid aan dezelfde leerstof werken, maar op een verschillend niveau. Dat is naar mijn mening de meest concrete aanleiding geweest om die methode in een heel nieuw didactisch jasje te steken. In '77 is men begonnen en na 15 maanden was er nog maar heel weinig geschreven. Want niemand wist precies hoe het moest. Ja, openheid, kinderen zouden hun eigen aanpak mogen kiezen bij opgaven en niet ieder-

een hoefde dezelfde opgaven te maken – maar hoe je dat moest doen? Het duurde nogal lang voordat er echt werd geschreven.

Nol van 't Riet
Ja, die openheid, dat was een zwaarwegend punt.

Wim Visser
En daarvan is eigenlijk alleen maar overgebleven een openheid naar aanpak, die ook nog eens minder wordt na het eerste jaar. Want je komt er toch niet altijd even ver mee. Als je naar sterk algoritmische dingen toe wilt, dan is het een nadeel om met openheid te werken.

Nol van 't Riet
Die openheid is heel aardig gerealiseerd in de brugklasdelen omdat die oriënterend zijn. Maar in de tweede klas werpt het examen zijn schaduwen vooruit. Dan zijn er veel minder dingen die zich lenen voor open aanbieding.

Wim Visser
Het moest er leuk uitzien, aantrekkelijk zijn voor kinderen. Ruimte voor de doener en de denker.



Auteur Wim Visser: ... keutelen van groot belang ...

Aan alles werd gedacht en daar werd heel lang over gedaan.

Wim Groen
Bij de bovenbouw was vooral het probleem dat er goede, echte toepassingen van de wiskunde in de boeken moesten worden opgenomen. Niet alleen als toetje, maar ook als hulp bij de begripsontwikkeling.

Moderne wiskunde **doet een poging om het punt van afhaken een beetje naar achteren te schuiven.**

Nol van 't Riet
Zowel door de auteurs van de onder- als die van de bovenbouw-delen is er heel lang voorbereidend werk gedaan. Die groepen waren allebei nieuw, het leerplan voor de bovenbouw was nieuw en het idee van een open methode voor de onderbouw was op zichzelf ook heel nieuw. Er waren heel veel onzekerheden. Maar op een gegeven ogenblik gaat het licht op groen, net als bij een autorace. Dan is het rijden, dan moet er alleen nog maar worden geschreven. En dat is een hele rit. Vier, vijf jaar.
En soms dwingt de overheid je om er te zijn, zoals bij de bovenbouwdelen. De oriëntatie bij de onderbouw-delen kon zo lang duren, omdat het tijdstip van verschijnen niet was vastgelegd. Je kon er nog rustig een jaartje aan vastplakken.

Openheid dus. Wat zit er nog meer in het didactisch concept?

Wim Groen
Bij de bovenbouw richten we ons op leraren die het belangrijk vinden dat hun leerlingen zich al werkend oriënteren in de stof. Dat betekent dat we zo veel mogelijk proberen te werken met instap-problemen en niet-wiskundige contexten die het denken kunnen ondersteunen. We bieden geen hapklare brokken, maar proberen tot nadenken te prikkelen.

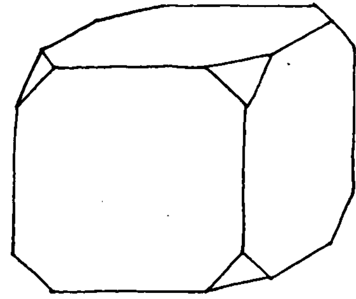
Wim Visser
Bij de onderbouw hebben we bovendien nog gekozen voor uitstel van formalisering, meer meetkunde, minder algebra. Niet 2a + 3a, maar geef ze een

23 Van een kubus is bij elk hoekpunt een stukje afgezaagd.

a Hoeveel hoekpunten heeft het nieuwe voorwerp?

b Hoeveel grensvlakken?

c Hoeveel ribben?



kubusje in de hand. Als je daar nou eens een hoek af zou zagen, wat gebeurt er dan? Dat vind ik van fundamenteel belang. Begrippen bij ze opwekken, ze leren denken, ze zelf laten verwoorden hoe het systeem in elkaar zit. Een eigen aanpak. Dat hebben wij daar geprobeerd.

Nol van 't Riet
Ja, en leren vertrouwen op je eigen denken. Dat zit er ook achter.

Wim Visser
Niet klakkeloos nadenken wat anderen voorgedacht hebben. Ik heb eens een proefwerkopgave gehad, die je snel op kon lossen als je een formule vond. Had één leerling een oplossing helemaal uitgetekend, met allemaal stippen, een gruwelijk werk, maar er kwam wel 87 uit. Dan zeg je: dat is een laag niveau, maar die komt er wel. Op den duur ziet die het nut van verkortingen wel in.
Als je een 2-jarige brugperiode hebt, dan zie je dat de kinderen in de eerste klas bijna zonder uitzondering met het boek uit de voeten kunnen. Dat wordt in de tweede klas minder, want dan krijg je te maken met het examen en de eindtermen van de onderbouw.

Aan de ene kant moet het initiatief bij de leerling gelegd worden, aan de andere kant moet er duidelijkheid zijn.

Nol van 't Riet
Uiteindelijk liggen die eindtermen van de onderbouw gewoon vast. Gegeven hun startpositie en de weinige beschikbare uren zijn veel kinderen niet in staat het bestaande programma in drie of vier jaar naar behoren af te werken. De vraag is wanneer je ze dat duidelijk maakt. *Moderne wiskunde* doet een poging om het punt van afhaken een beetje naar achteren te schuiven.

Wim Visser
Ja, halverwege klas 2 naar mijn gevoel. Bij sommige methoden ligt dat tijdstip te laat. Dan zeggen die kinderen in klas drie nadat ze het vak gekozen hebben: in klas 2 was het nog zo leuk. Dat moet je dus eerder duidelijk maken.

Alles bij elkaar is het wiskunde-onderwijs nogal veranderd de laatste jaren. Hoe kijken jullie daar tegenaan?

Nol van 't Riet
Hele stukken wiskunde bestaan niet meer. Dat de bissectrices van een driehoek door één punt gaan, wat toch heel bijzonder is – die wiskunde bestaat niet meer. Wat wiskunde wel is, dat weet zo langzamerhand geen mens meer.

Wim Groen
Althans in het voortgezet onderwijs. Op de universiteit weten ze precies wat wiskunde is. Die glimlachen mild om dat gewriemel in de onderwijswereld.

Wim Visser
Zo'n 5 jaar geleden was die onzekerheid er bij driekwart van de mensen niet. Maar langzaam maar zeker rukt het op: nieuwe leerplannen, nieuwe methoden, toepassingen, wiskunde A.

Nol van 't Riet
Het is ook een maatschappelijke ontwikkeling. Ik bedoel: je hebt tegenwoordig prachtige computerprogramma's, waarom leren wij die kinderen nog grafieken te tekenen met de hand? Dat soort vragen, dat komt er allemaal aan.

Wim Groen
Twintig, dertig jaar geleden was de school meer bedoeld om je mogelijkheden te verkennen. Maar nu moet de school heel vaak opleiden om daar heel concreet in een beroepssituatie iets mee te doen. Je moet met computers leren werken, omdat je er straks bij de Amro-bank ook mee om moet kunnen gaan. Dat vraagt vooral van oudere leraren een grote omschakeling.

Wim Visser
Daar komt nog iets bij. Vroeger, als juffrouw Ubbens bij ons op school zei: je kunt het niet, dan kon je het niet. Dat lag niet aan juffrouw Ubbens, die was gewoon goed. Het boek gebruikte ze al jaren, het lag dus aan het kind. Tegenwoordig zet elke school zijn deur naar de onderkant een ietsje open. Zo'n school zegt, wij hebben kinderen nodig en je probeert het maar. Je kunt niet meer zeggen, het kind deugt niet. Daar zit ook een verschuiving.

Gebruikers volgen lang niet altijd de auteurs. Dat deed ik als leraar ook niet. Dat moet kunnen, vind ik.

Nol van 't Riet
En temidden van al die veranderingen probeer je dan wat aan het maken van leermiddelen te doen. Nou ja, wij hebben tegen elkaar gezegd, we proberen een methode te maken die een behoorlijk marktaandeel heeft. En dat heeft dan allerlei consequenties.

Een groot marktaandeel – dat betekent compromissen.

Wim Groen
Er wordt in het veld natuurlijk heel verschillend gedacht. Er zijn leraren die vinden dat leerlingen veel explorerend bezig moeten zijn. Niet te veel voorzeggen, er moet goed gewerkt worden. Terwijl anderen zeggen: er moet gewoon staan hoe het in elkaar zit, het moet teruggezocht kunnen worden. Dat is een spanning die je in het auteursteam ook tegenkomt. Aan de ene kant moet het initiatief bij de leerling gelegd worden, aan de andere kant moet er duidelijkheid zijn. Leerlingen moeten weten: dat moet ik leren.

Wim Visser
Je gebruikte de term compromissen. Nu weet ik niet hoe je dat bedoelt. Wij richten ons op een groep docenten die zegt: begin maar, kijk hoe ver je komt, dan zetten we het straks op een rijtje. De kunst is dan om het boek zo te maken dat een leraar die anders wil werken, daarin niet door het boek belemmerd wordt.

Maar ook binnen een bepaald segment heb je natuurlijk wel weer tegenstellingen.

Nol van 't Riet
Scholen zijn mammoet-instituten geworden. Er is nooit meer één man of vrouw die beslist over de aanschaf van een boek. Er is een sectie en daar zitten wel tien mensen in. Die moeten het met elkaar eens worden. Het is zoals Wim net zei, de kunst is om je methode zo aantrekkelijk te maken dat ook de niet uitgesproken voorstanders er goed mee uit de voeten kunnen.

Wim Groen
Daar ben je voortdurend naar aan het zoeken. Gebruikers volgen lang niet altijd de auteurs. Dat deed ik als leraar ook niet. Dat moet kunnen, vind ik.

Wat vinden jullie zelf leuk aan wiskunde?

Wim Visser
Mag ik dat van een andere kant benaderen. Met kinderen bezig zijn is hartstikke leuk. Als je een taal geeft, dan is er toch een hele afstand tot die kinderen. Als je met wiskunde bezig bent, dan kun je hele kleine leerprocesjes doormaken met een kind. Je bent bezig met het denken. Kind zit vast, zoek eens uit waar hij vast zit. Daar wijs je hem op en dan loopt hij zelf verder. Dat is het leuke.

samenvatting

Tweeterm
Tweetermen zijn bijvoorbeeld $x^2 - 9$ of $4x + 3$ of $a + b$

Drieterm
Drietermen zijn bijvoorbeeld: $x^2 - 2x + 5$ of $a + b - c$

Produkt van twee tweetermen
Een voorbeeld hiervan is $(x + 2) \cdot (x + 3)$
Met behulp van een rechthoek is te zien hoe je deze twee tweetermen kunt vermenigvuldigen.
Notatie: we schrijven $(x + 2)(x + 3)$ in plaats van $(x + 2) \cdot (x + 3)$

	x	3
x	x^2	$3x$
2	$2x$	6

Een bijzonder produkt van twee tweetermen
Dit zijn produkten die de vorm hebben van:
$(a + b)(a - b)$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$-(3a-4)$
Dit is het tegengestelde van $3a - 4$
Dus $-(3a - 4) = -3a + 4$

Wanneer gebruik je de distributieve eigenschap?
Deze is te gebruiken in de volgende gevallen:

– Je wilt bijvoorbeeld 6×34 uitrekenen.
Schrijf 34 als $30 + 4$
Je mag nu de termen 30 en 4 beide met 6 vermenigvuldigen en dan optellen.

– Je wilt bijvoorbeeld $\frac{6a + 15}{3}$ korter schrijven.
Je mag nu de termen $6a$ en 15 beide door 3 delen en dan optellen.

– Je wilt bijvoorbeeld $2 \cdot (a - 15)$ zonder haakjes schrijven.
Je mag nu de termen a en 15 beide met 2 vermenigvuldigen en dan van elkaar aftrekken.
Het is soms handig om een vermenigvuldigtabel te gebruiken.
Hiernaast zie je daar een voorbeeld van.

$6 \times 34 =$
$6 \times 30 + 6 \times 4 =$
$180 + 24 = 204$

$\frac{6a + 15}{3} = 2a + 5$

$2 \cdot (a - 15) = 2a - 30$

×	$2x$	-5
$3x$	$6x^2$	$-15x$

$3x(2x - 5) =$
$6x^2 - 15x$

Wim Groen
Ik heb niet echt een passie voor wiskunde. Ik ben er min of meer toevallig in verzeild geraakt. Ik voelde meer voor natuurkunde. Ik studeerde natuur- en wiskunde en er werd mij al heel snel gevraagd of ik les wilde geven. Toen zat ik wel in de boot, want natuurkunde studeren kan niet als je lesgeeft. Want je moet de hele dag op het laboratorium zijn. En toen heb ik de wiskunde gekozen.
Wat ik van wiskunde het aardigst vond, was de meetkunde. Maar dan de klassieke Euclidische meetkunde. Dat puzzelachtige, het opsporen van bewijzen, het vinden van een goede redenering. Vervelend is dat wiskunde nauwelijks bijdraagt aan je sociale contacten. Ik praat met buitenstaanders nooit over mijn vak. Nooit. Wat doe je? Ik ben leraar wiskunde.
O...

Wim Visser
Net zoiets als belastinginspecteur.

Een gewetensvraag: is *Moderne Wiskunde* beter dan andere methoden?

Wim Visser
Dat is heel ongenuanceerd gesteld. Voor sommige leraren natuurlijk niet, het hangt helemaal af van hun werkwijze. Ik heb vroeger wel gedacht dat je een methode kon maken die de absolute top zou zijn. Maar dat kan natuurlijk niet.

Wim Groen
Maar is het ook een goede methode voor de leerlingen?

... kinderen durven nu zelf een aanpak te kiezen en ook voort te zetten – dat durfden wij vroeger niet.

Nol van 't Riet
Niet voor allemaal natuurlijk. Om een voorbeeld te geven: ik heb me laatst eens georiënteerd in het volwassenenonderwijs. Daar moet in een beperkt aantal uren wiskunde geleerd worden en daar wordt *Sigma* heel veel gebruikt. Zo'n aanpak van hier staat het, zo zit de wereld in elkaar, is daar beter geschikt dan *Moderne wiskunde*.

Wim Visser
Maar kinderen durven nu zelf een aanpak te kiezen en ook voort te zetten – dat durfden wij vroeger niet. Al van tevoren zeggen: ik kan het niet, dat haal je bij een heleboel leerlingen weg. Maar ik kan me ook voorstellen dat er leerlingen zijn die via onze methode minder goed scoren. Voor heel intelligente leerlingen gaat het misschien te langzaam. En erg onzekere kinderen zullen soms met meer structuur beter geholpen zijn.

Wim Groen
Je kunt leerstof waar de mensheid zo lang voor nodig heeft gehad om ze te ontwikkelen, niet in een te korte tijd geven, ook niet aan heel intelligente mensen. Voor intelligente leerlingen gelden dezelfde principes als voor andere leerlingen. Je hebt tijd nodig om je te oriënteren.

Wat is de rol van de uitgever bij het totstandkomen van een methode?

Wim Visser
Dat is een stimulerende en een corrigerende invloed. Hij werkt veel met de rode pen...



Uitgever Nol van 't Riet: *... uitgesproken beleid ...*

Wim Groen
Die uitgever schept de structuur waarin je moet werken. Vroeger ging dat anders. Dan had je een leraar die na 25 jaar zo langzamerhand een methode ontwikkeld had, en die dacht: ik haal er goede resultaten mee. Ik ga eens vragen of ik dat niet aan een uitgever kan slijten. Nu is dat heel anders. Als je nu naar de HEWET kijkt, is er natuurlijk geen enkele auteur die op eigen houtje in zo korte tijd boeken voor zo'n leerplan kan maken.

Ik heb vroeger wel gedacht dat je een methode kon maken die de absolute top zou zijn. Maar dat kan natuurlijk niet.

Wim Groen
Er zijn mensen in het team, die schrijven mee omdat ze die en die tekst willen hebben voor hun situatie en hun klas. En er zijn mensen die steeds de totale onderwijssituatie in hun achterhoofd hebben. Dat er veel verschillende mensen met *Moderne wiskunde* bezig zijn, is natuurlijk een garantie dat er niet te veel naar de ene of de andere kant wordt doorgeslagen.

Nol van 't Riet
Bij Wolters-Noordhoff is de rol van de uitgever, het entameren en het begeleiden van het proces, heel groot. WN volgt wat dat betreft een uitgesproken beleid.

Hoe geven jullie de gebruikers invloed op de methode?

Nol van 't Riet
In voorkomende gevallen hebben we gebruikersbijeenkomsten. En de auteurs werken zelf met de boeken, ze horen het commentaar van hun collega's op school. Verder bezoek je conferenties en bijeenkomsten met leraren. En je krijgt informatie via vertegenwoordigers. Een heel informeel netwerk van informatie-kanalen. En in '85 hebben we een uitgebreid onderzoek gehouden onder zo'n 600 leraren. Dat heeft voor de nieuwe vijfde editie een belangrijke rol gespeeld. Daar hebben we belangrijke conclusies uit getrokken – die niet altijd even gemakkelijk waren om te verwerken. Maar daar hebben we goed naar geluisterd.

Over de schrijvers:

Wim Groen
Geboren in Hoogkerk, 1940. Studeerde wiskunde in Amsterdam. Was leraar in Amsterdam en Hilversum. Sinds 1973 aan de VU verbonden als docent voor de didactiek van de wiskunde. Ging in 1968 *Moderne Wiskunde* gebruiken ('de gestencilde editie'). Kreeg in 1974 zijdelings met het schrijven te maken. Gaf tekstadviezen bij de bovenbouw ('78/'79) en werkte een jaar mee aan de onderbouw (1978). In '80 weer betrokken geraakt bij de bovenbouw. Getrouwd, twee kinderen. Luistert graag naar klassieke muziek. Heeft bijna alle platen van Glenn Gould.

Wim Visser
Geboren in Monnickendam, 1942. Volgde de Kweekschool en was daarna werkzaam in het lager onderwijs. Sinds 1970 leraar bij mavo De Morgenster in Monster. Raakte in 1977 als auteur betrokken bij de onderbouwdelen van *Moderne wiskunde* (de vierde editie). Getrouwd, twee kinderen. Verzamelt antiek ('het lukt alleen nog niet zo.').

Nol van 't Riet
Geboren in Broek op Langedijk, 1945. Studeerde wiskunde in Amsterdam. Gaf daar ook les van 1971 tot 1975 aan de csg Buitenveldert en van 1975 tot 1979 aan de lerarenopleiding VL-VU. Sinds 1979 werkzaam bij Wolters-Noordhoff te Groningen als uitgever wiskunde. Getrouwd, twee kinderen. Besteedt zijn vrije tijd voornamelijk aan organisatorisch werk voor het internationale correspondentie-schaak.

● Recreatie ● ● ● ●

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

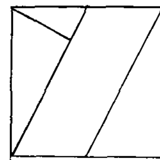
▶ Opgaven

Op 2 maart 1988 had de tweede ronde plaats van de Vlaamse Wiskunde Olympiade. De opgaven zijn niet van Vlaamse maar van Amerikaanse makelij en zijn in Euclides niet gepubliceerd. Een drietal ervan vond ik (met enkele modificaties) de moeite voor een plaats in de rubriek recreatie waard. Hieronder volgen ze. Het waren multiple choice opgaven. De potentiële antwoorden heb ik niet vermeld.

596 Met deze opgave kunt u misschien ook in de klas succes hebben. Alleen de eerste vraag is op de olympiade gesteld. De andere zijn door mij bijgevoegd.
Als slot van een bowling-kampioenschap bekampen de vijf topspelers elkaar in een eindronde. Door het lot wordt aangewezen wie van hen nr. 5, nr. 4, nr. 3, nr. 2 en nr. 1 toegewezen krijgt. Eerst speelt nr. 5 tegen nr. 4. De verliezer krijgt de vijfde prijs. De winnaar speelt tegen nr. 3. De verliezer krijgt de vierde prijs. De winnaar speelt tegen nr. 2. De verliezer krijgt de derde prijs. De winnaar speelt tegen nr. 1. De verliezer krijgt de tweede prijs, de winnaar de eerste.
a In hoeveel verschillende volgordes kunnen de spelers de eerste t.m. de vijfde prijs krijgen?
b Wat is de kans dat speler nr. 5 de vijfde, vierde, derde, tweede, eerste prijs krijgt? Hoe groot zijn deze kansen voor de vier andere spelers?
c De eerste prijs is a gulden, de tweede $\frac{1}{2}a$ gulden, de derde $\frac{1}{4}a$, de vierde $\frac{1}{8}a$ en de vijfde $\frac{1}{16}a$ gulden. Wat is de verwachte waarde van de prijs die ontvangen wordt door speler nr. 5, ..., speler nr. 1?
d $a = 64$. Voordat de loting plaats vindt, zegt een van de spelers dat hij er een tientje voor over heeft om nr. 1 te mogen zijn. Hoe oordeelt u over zijn verstand?

597 Onderstaand vierkant is in vier stukken verdeeld. Maak van deze vier stukken een rechthoek met ongelijke zijden. Hoe verhouden zich de lengten van de zijden van deze rechthoek? (Zie figuur 1.)

598 Gegeven is de functie $f: x \to 4x - x^2$ van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$.
Kies een beginwaarde x_0. Definieer voor elke $n \geqq 1$:
$x_n = f(x_{n-1})$. Voor elke x_0 kan men nagaan of de rij $x_0, x_1, \ldots$ slechts een eindig aantal verschillende termen bevat. Voor hoeveel waarden van x_0 is dat het geval?
Voor eindig veel en zo ja, hoeveel? Voor aftelbaar oneindig veel? Of voor meer dan aftelbaar oneindig veel?
Graag laat ik u in de gelegenheid uw fantasie hierover te laten gaan en binnen een maand de resultaten van uw fantasie mij per brief kenbaar te maken.



Figuur 1

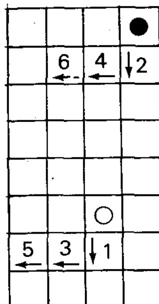
▶ Oplossingen

592 f is een continue functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$.
$(f(x))^n = f(x^n)$ voor elke reële x en n waarvoor deze uitspraak betekenis heeft.
Wegens $(f(\sqrt{2}))^2 = f((\sqrt{2})^2)$, is $f(2) \geqq 0$.
Onderstel $f(2) = p$ met $p > 0$.
Dan is
$f(q) = f(2^{^2\log q}) = (f(2))^{^2\log q} = p^{^2\log q}$ voor $q > 0$
Als $0 < p < 1$, dan is
$\lim\limits_{q \to 0} p^{^2\log q} = \infty$
en dit is onverenigbaar met de continuïteit van f. Dus is $p \geq 1$.
$p = 1$ geeft $f(q) = 1$ voor elke positieve q en dus ook voor $q = 0$.
$p > 1$ geeft $f(0) = 0$, weer volgens de continuïteit.
Algemeen is
$(f(-q))^2 = f((-q)^2) = f(q^2) = (f(q))^2$
dus
$(f(-q) = f(q) \vee f(-q) = -f(q)$
Ten gevolge van de continuïteit is dan
$\forall q : f(-q) = f(q) \vee \forall q : f(-q) = -f(q)$
Zodat we de volgende drie mogelijkheden krijgen:
a $f(q) = p^{^2\log q}$ voor $q > 0$
$f(q) = p^{^2\log -q}$ voor $q < 0$ $\quad (p > 1)$
$f(0) = 0$
b $f(q) = p^{^2\log q}$ voor $q > 0$
$f(q) = -p^{^2\log -q}$ voor $q < 0$ $\quad (p > 1)$
$f(0) = 0$
c $f(q) = 1$ voor elke q.
Onderstel nu dat $f(2) = 0$. Dan vinden we op bovenstaande manier dat $f(q) = 0$ voor elke $q > 1$. Verder vinden we $f(1) = 0^{^2\log 1} = 0^0 = 1$, in strijd met de continuïteit.
Dus is $p = 0$ niet mogelijk.
$f(1987) = 1988$ is mogelijk.

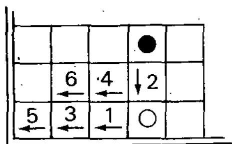
Kies daartoe p zo, dat $1988 = p^{{}^{2}\log 1987}$.
Kies dus $p = 1988^{{}^{1987}\log 2}$.
Een goede oplossing kreeg ik van C. W. Vugs, Maputo (Mozambique). Ik vermeld de vorm waarin hij de oplossing schreef, die fraaier is dan de mijne.

$f(x) = x^{\alpha}$ voor $x \geqq 0$
$f(x) = |x|^{\alpha}$ voor $x < 0$ $\qquad (\alpha > 0)$
of
$f(x) = x$ voor $x \geqq 0$
$f(x) = -|x|^{\alpha}$ voor $x < 0$ $\qquad (\alpha > 0)$
of
$f(x) = 1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

594 Een onderkoning mag zich alleen één vak in horizontale of verticale richting verplaatsen. Op het schaakbord staat een witte onderkoning op a1, een zwarte op h8. Wit is aan zet. Hoe loopt het spel af?
Het minimale aantal zetten waarin de ene onderkoning het veld van de andere kan bereiken, noemen we d. In de aanvangsstand is $d = 14$. Bij elke zet wordt d hetzij 1 groter hetzij 1 kleiner. Is wit aan zet, dan is dus steeds d even, is zwart aan zet, dan is d oneven. Na de eerste zet is $d = 13$, na de tweede is $d = 12$. De strategie van zwart zal zijn te pogen d te verkleinen. Wit kan proberen zich daartegen te verzetten. In onderstaand diagram ziet men hoe wit dit kan en wat er dan gebeurt. Het eindresultaat zal zijn dat wit in een hoek gedreven wordt en dan d wel moet verkleinen.

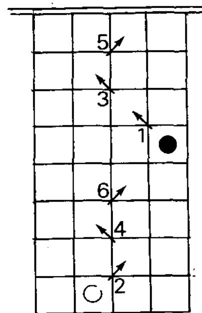


Zwart bereikt zo tenslotte dat $d = 2$. Hij drijft wit in een hoek. En na de volgende zet van wit is de witte onderkoning dan een prooi van de zwarte. Zie het diagram hieronder.

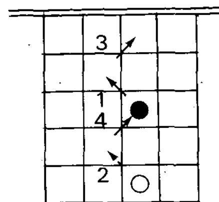


De strategie van zwart kan men nog iets preciezer omschrijven. In het bovenste diagram is na zet 1 de afstand van de onderkoningen in verticale richting 6 en in horizontale richting 1. Notatie: $d_v = 6$ en $d_h = 1$. Omdat $d_v > d_h$, verkleint zwart d_v. ($d_v = d_h$ is onmogelijk, want als zwart aan zet is is $d_v + d_h$ oneven.)
Nu de hofdames. Deze mogen zich alleen in diagonaalrichting één veld verplaatsen.

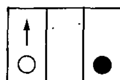
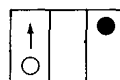
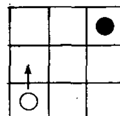
De situatie is analoog. Aanvankelijk is $d = 7$. Bij wit aan zet is d steeds oneven, bij zwart aan zet even. Nu is de strategie van wit het verkleinen van d. In onderstaand diagram ziet men hoe wit te werk gaat.



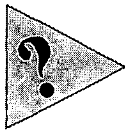
Na zet 1 is de afstand van de hofdames in de richting van de zwarte hoofddiagonaal (a1 − h8) 3 en in de richting van de witte hoofddiagonaal 2. Notatie: $d_z = 3$ en $d_w = 2$. Omdat $d_z > d_w$, verkleint wit d_z. Zo wordt de zwarte hofdame naar de rand van het bord gedreven en moet dan wel d verkleinen.
Onderstel op de een of andere manier is $d = 2$ verkregen. De laatste zet is dan door wit gedaan. Voordat wit deze zet deed was bijv. $d_z = 2$ en $d_w = 1$. Na de zet van wit is dan $d_z = d_w = 1$. Mocht de zwarte hofdame dan nog niet op een randveld staan, dan wordt ze naar de rand gedreven. Zie onderstaand diagram.



Zwart staat nu verloren.
Algemeen geldt, zowel bij de onderkoningen als bij de hofdames: als in de beginstand d even is dan wint zwart, als d oneven is dan wint wit.
Ten slotte de echte koning. Hier dreigt eerst een einde aan de partij te komen, zodra $d = 2$. Maar onderstel $d = 2$ en wit aan zet. Dan is het voor wit steeds mogelijk een zodanige zet te doen dat $d = 2$ blijft. Zie de diagrammen.

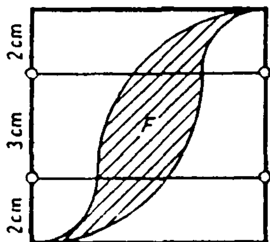
Dus remise. Hetgeen voor geen enkele schaker een verrassing zal zijn.



Denkopgaven

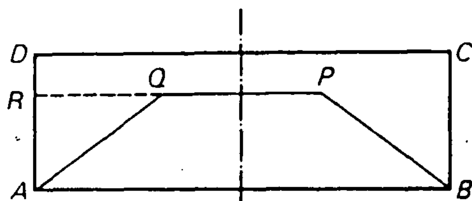
3a

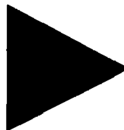
Vier kwartcirkels, in twee hoekpunten rakend aan zijden van een rechthoek.
Neem $\pi = 3\frac{1}{7}$
Het hoeveelste gedeelte van de rechthoek is gearceerd?



3b

Een rechthoek $ABCD$. $AB = 169$, $AD = 54$. Het gelijkbenige trapezium $ABPQ$ bedekt de helft van rechthoek $ABCD$. R ligt op het verlengde van PQ en $PQ:QR = 5:4$, terwijl driehoek AQR $\frac{1}{9}$deel van de rechthoek bedekt.
Heeft het trapezium drie even lange zijden?





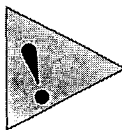
Mededelingen

Wintersymposium

Het Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap heeft deze keer als thema: 'Wiskunde en Maatschappij'. Het symposium wordt gehouden op zaterdag 14 januari 1989 in het gymnasium Johan van Oldenbarnevelt, Groen van Prinstererlaan 33, 3818 JN Amersfoort.
Het programma is als volgt:
10.00-11.00 uur: prof. dr. ir. P. J. Zandbergen (UT)
Drie voorbeelden van het nut van wiskunde in de techniek.
11.15-12.15 uur: mevr. ir. T. Tiemersma-Thoonen (DSM)
Interpretatie van laser doppler anemometry metingen.
13.30-14.30 uur: prof. dr. J. Wessels (TUE)
Geboorten en sterfte in industrie en samenleving.
U kunt zich voor dit symposium, uitsluitend schriftelijk, opgeven bij J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ 's-Gravenhage.
Op verzoek kunt u een prospectus met samenvattingen van de voordrachten thuisgestuurd krijgen. Deze prospectussen zullen begin december naar de scholen worden gestuurd.
Indien u wilt deelnemen aan de gezamenlijke lunch, stort u ƒ 10,– op postgirorekening 608077, t.n.v. J. W. Maassen, 's-Gravenhage, onder vermelding 'lunch wintersymposium'.

Van de redactie

Nieuw in de redactie van Euclides is ook Rob Bosch, werkzaam bij de K.M.A., wiens naam in een eerder bericht helaas is weggevallen. Wij heten hem alsnog van harte welkom!



Kalender

19 november 1988: Brussel, Contactdag Wiskundigen van het secundair onderwijs van het Belgisch Wiskundig Genootschap. Nadere inlichtingen bij Prof. F. Bingen, DWIN-VUB, Pleinlaan 2, B-1050 Brussel.
24 en 25 november 1988: Beekbergen, 2e VALO-conferentie Wiskunde 12-16. Aanmelding hiervoor bij H. Hesselink, Postbus 2061, 7500 CB Enschede.
28 januari 1989: Brussel. Jaarvergadering VVWL.
1, 2 en 3 juli 1989: Oostende. Tweejaarlijks congres VVWL.

Inhoud

Adressen van auteurs

Leon van den Broek, Wolfstraat 98, 6531 LP Nijmegen

F. Dekkers, p/a Hogeschool Kath. Leerg. Tilburg, Postbus 90110, 5000 LA Tilburg

Drs. W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn

L. Kuyk, p/a Hogeschool Kath. Leerg. Tilburg, Postbus 90110, 5000 LA Tilburg

Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag

George Schoemaker, De Dissel 11, 1251 ZA Laren

H. N. Schuring, Van Heemstralaan 21, 6814 KB Arnhem

J. Slavenburg, p/a Hogeschool Kath. Leerg. Tilburg, Postbus 90110, 5000 LA Tilburg